143

ANNALES

DE

L'INSTITUT HENRI POINCARÉ

RECUEIL DE CONFÉRENCES

ET MÉMOIRES DE CALCUL DES PROBABILITÉS ET PHYSIQUE THÉORIQUE

FASCICULE I — VOLUME I

INSTITUT HENRI POINCARÉ
1, RUE PIERRE-CURIE, 1

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
ÉDITEURS
49, BOULEVARD SAINT-MICHEL, 49

ANNALES

DE

L'INSTITUT HENRI POINCARÉ

RECUEIL DE CONFÉRENCES

ET MÉMOIRES DE CALCUL DES PROBABILITÉS ET PHYSIQUE THÉORIQUE

FASCICULE I

VOLUME I

INSTITUT HENRI POINCARÉ
1, RUE PIERRE-CURIE, 1

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
ÉDITEURS
49, BOULEVARD SAINT-MICHEL, 49

Théorie unitaire du champ physique

PAR

A. EINSTEIN

---

1. — La « théorie unitaire du champ physique » se propose de renouveler la théorie de la relativité générale en réunissant, dans une discipline unique, les théories du champ électromagnétique et du champ de gravitation.

A l'heure actuelle cette nouvelle théorie n'est qu'un édifice mathématique, à peine relié par quelques liens très lâches à la réalité physique. Elle a été découverte par des considérations exclusivement formelles et ses conséquences mathématiques n'ont pas pu être suffisamment développées pour permettre la comparaison avec l'expérience. Néanmoins, cette tentative me semble très intéressante en elle-même ; elle offre surtout de magnifiques possibilités de développement et c'est dans l'espoir que les mathématiciens s'y intéresseront, que je me permets de l'exposer et de l'analyser ici.

2. — Au point de vue formel, l'idée fondamentale de la théorie de la relativité générale est la suivante : l'espace à quatre dimensions, dans lequel ont lieu les phénomènes, n'est pas amorphe, mais possède une structure ; l'existence de celle-ci se traduit par l'existence d'une métrique riemannienne dans cet espace.

Physiquement, cela signifie qu'il existe une forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

caractéristique de cet espace, qui exprime sa métrique, et qui, égalée à zéro,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$$

définit la loi de la propagation de la lumière dans cet espace. Cette forme quadratique est donc reliée intimement à la réalité physique ; son introduction n'est pas un simple jeu de l'esprit et son emploi se justifie par la correspondance qu'on peut établir entre ses coefficients $g_{\mu\nu}$ et un ordre de phénomènes connus, — les phénomènes de gravitation.

La structure de l'espace étant définie par la forme quadratique fondamentale, le problème qui se pose alors est le suivant : quelle est la loi *la plus simple* qu'on puisse imposer aux coefficients $g_{\mu\nu}$? La réponse est donnée par la théorie tensorielle de RIEMANN. On peut former à partir des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées un tenseur $R^i_{k,lm}$, appelé le tenseur de courbure de RIEMANN. En le contractant par rapport aux indices i et m on en déduit un autre tenseur de second rang R_{kl}. La loi la plus simple à laquelle on puisse assujettir les $g_{\mu\nu}$ s'exprime simplement par l'équation

$$R_{kl} = 0.$$

Cette théorie serait la théorie physique idéale si elle pouvait décrire complètement le champ de forces qui existe réellement dans la nature, c'est-à-dire l'ensemble du champ de gravitation et du champ électromagnétique. Mais l'équation $R_{kl} = 0$, qui semble décrire les phénomènes de gravitation, ne rend absolument pas compte des phénomènes électromagnétiques. La métrique seule ne suffit pas pour décrire cet ensemble.

Pour caractériser complètement l'espace, on cherchait à se donner, en plus de la forme fondamentale $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, une forme linéaire $\varphi_\mu dx^\mu$, dont les coefficients φ_μ seraient les composantes du vecteur potentiel électromagnétique. Les équations complètes du champ seraient alors de la forme $R_{kl} + T_{kl} = 0$, T_{kl} étant un terme dépendant des potentiels, le tenseur électromagnétique de MAXWELL par exemple, ou quelque chose d'analogue. Cependant cette manière de procéder n'est pas satisfaisante. En effet, l'équation $R_{kl} + T_{kl} = 0$ renferme deux termes *indépendants* ; on peut logiquement en changer un sans toucher à l'autre. On introduit de cette façon, dans la théorie, deux éléments indépen-

dants, correspondant à *deux* « états » de l'espace. La nature présenterait ainsi un manque d'unité auquel notre esprit se refuse absolument de croire. Il semble au contraire beaucoup plus satisfaisant d'attribuer ce défaut à l'imperfection de la théorie, et de chercher à la compléter, à l'enrichir, pour réaliser une unité vers laquelle notre esprit tend invinciblement.

La théorie unitaire du champ physique part donc de la constatation que la métrique seule ne suffit pas pour décrire les phénomènes. Cependant, celle-ci fournit au moins une partie de la vérité ; elle possède certainement un substratum physique. Le problème qui se pose alors, consiste à trouver l'élément qui complètera la métrique et qui permettra de décrire la structure de l'espace sans rien laisser de côté.

3. — Dans ce but, cherchons quel est le sens de la notion de métrique riemannienne et quelle représentation on peut en donner.

Considérons un continu à n dimensions, présentant une structure riemannienne. Un tel continu est caractérisé par le fait que la géométrie euclidienne est valable dans un domaine infiniment petit autour d'un point donné. De plus, si on se donne deux points A et B à distance finie, on peut comparer entre elles *les longueurs* de deux éléments linéaires, situés en A et en B, mais on ne peut pas faire la même chose pour leurs *directions* ; dans la géométrie riemannienne il n'existe pas de parallélisme à distance.

4. — Imaginons dans un tel espace, en un point donné, un système cartésien de coordonnées, c'est-à-dire un système de n axes rectangulaires, portant chacun un vecteur unité. Nous appellerons un tel système d'axes un *n-pode* (n-Bein).

Le domaine euclidien infinitésimal entourant un point est complètement caractérisé quand on s'est donné un n-pode en ce point. La métrique de l'espace est connue si l'on a fixé un n-pode *en chaque point* de cet espace. Mais inversement, la métrique d'un espace riemannien ne suffit pas pour déterminer d'une manière univoque, un n-pode en chaque point. En effet, la métrique de l'espace reste la même si l'on fait subir à tous les n-podes des rotations arbitraires. Quand on ne se donne que la métrique, l'orientation des n-podes n'est pas fixée ; il reste encore un certain arbitraire dans la détermination de la structure de l'espace. On voit donc de cette façon, que la description des

espaces par des n-podes est, en quelque sorte, plus riche que la description à l'aide de la forme quadratique fondamentale. On conçoit qu'on puisse trouver dans l'arbitraire qu'introduit cette description, les moyens de rattacher à la structure de l'espace la cause des phénomènes électromagnétiques, qui n'ont pas encore trouvé de place dans la théorie.

Ce n'est pas la première fois qu'on envisage de tels espaces. Du point de vue purement mathématique ils ont déjà été étudiés auparavant. M. CARTAN a eu l'amabilité de rédiger, pour les *Mathematische Annalen*, une note exposant les diverses phases du développement formel de ces conceptions.

Supposons qu'on se donne un n-pode en A ; la structure de l'espace sera définie si nous nous donnons en chaque autre point un n-pode quelconque, que nous regarderons comme parallèle au premier, par définition. Entre deux points de l'espace on peut donc établir outre une relation de grandeur, une relation de direction. La notion de parallélisme à distance possède maintenant un sens précis, qu'elle ne pouvait pas avoir dans la théorie de RIEMANN. Deux vecteurs ayant leurs origines en des points à distance finie, seront parallèles, s'ils ont les mêmes composantes dans leurs systèmes locaux. Quand on caractérise la structure de l'espace par un champ de n-podes, on exprime *en même temps*, l'existence d'une métrique riemannienne et celle du parallélisme à distance ; entre deux éléments infinitésimaux de cet espace il y a ainsi non seulement une relation de grandeur, exprimée par la métrique, mais aussi une relation de direction, exprimée par l'orientation des n-podes.

En résumé, la seule hypothèse nouvelle à introduire pour arriver à une géométrie plus complète que celle de RIEMANN, concerne l'existence de « directions » dans l'espace et de relations entre ces directions. Cette notion de « direction » n'est pas contenue, ni dans la notion de continu, ni dans celle d'espace. Il faut donc une hypothèse supplémentaire pour admettre qu'il y a dans l'espace quelque chose comme les relations de direction, exprimées par l'existence d'un parallélisme à distance finie.

Cependant il est facile de voir que, même avec l'hypothèse du parallélisme à distance jointe à celle d'une métrique riemannienne, le champ des n-podes n'est défini qu'à une rotation près (commune pour tous les n-podes).

5. — Introduisons un système général de coordonnées de Gauss et considérons le n-pode attaché au point P. Soient $h_s{}^\nu$ les composantes des vecteurs unitaires de l'n-pode dans le système de coordonnées de Gauss. Dans ce qui suit, tout index grec sera relatif aux coordonnées et tout index latin à l'n-pode. $h_s{}^\nu$ représente donc la composante ν-ème du vecteur unité correspondant à l'axe s de l'n-pode. Dans un espace quadridimensionnel, $n = 4$, nous avons donc 16 grandeurs $h_s{}^\nu$ qui décrivent parfaitement la structure de l'espace.

Ces grandeurs étant données, on peut calculer les composantes d'un vecteur quelconque A dans un système local, en fonction de ses composantes dans le système de Gauss. On a

$$A^\nu = h_s{}^\nu A_s \tag{1}$$

et inversement

$$A_s = h_{s\nu} A^\nu \tag{2}$$

où les $h_{s\nu}$ sont les mineurs du déterminant $h = |h_s{}^\nu|$ divisés par h. Suivant l'usage, on doit faire la sommation par rapport aux indices qui se trouvent figurer deux fois.

Pour avoir la métrique de cet espace calculons la grandeur d'un vecteur A. Dans un système local, la géométrie euclidienne étant valable, on a :

$$A^2 = \sum A_s^2 = \sum h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu A^\nu. \tag{3}$$

Les coefficients de la forme métrique fondamentale $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ seront donc donnés par

$$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}. \tag{4}$$

On voit donc qu'un champ de n-podes ($h_s{}^\nu$) détermine complètement la métrique ($g_{\mu\nu}$) mais que la réciproque n'est pas vraie.

Les grandeurs $h_s{}^\nu$ forment le tenseur fondamental analogue au tenseur $g_{\mu\nu}$ de l'ancienne théorie ; pour le cas $n = 4$, il y a 16 grandeurs $h_s{}^\nu$ et seulement 10 $g_{\mu\nu}$.

La conception de tenseur se trouve élargie dans cette théorie. En effet, nous devons considérer ici, non seulement les transformations changeant le système de coordonnées, mais aussi celles qui modifient l'orientation des n-podes. Les n-podes sont déterminés à une rotatiou près ; les seules relations admissibles devront donc être invariantes

par rapport à une telle rotation. Par exemple, changeons en même temps le système de coordonnées et l'orientation des systèmes locaux. La rotation étant caractérisée par les coefficients α_{st} constants, indépendants des coordonnées et tels que

$$(5) \qquad \alpha_{s\mu} \cdot \alpha_{s\nu} = \alpha_{\mu s} \cdot \alpha_{\nu s} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

on aura

$$(6) \qquad h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} h_t^\rho.$$

A chaque index local correspond une transformation α et à chaque indice grec une transformation ordinaire.

6. — Les lois algébriques auxquelles sont soumis ces tenseurs sont presque les mêmes que pour les tenseurs du calcul différentiel absolu. On peut définir la somme et la différence de deux tenseurs T et S, ayant les mêmes indices. Le produit de deux tenseurs a la même loi de transformation qu'un tenseur de rang plus élevé.

L'opération de la contraction est aussi applicable, soit pour les indices grecs, soit pour les indices latins. Pour les premiers il faut toujours égaler un indice supérieur à un indice inférieur. La mutation des indices est possible ; en particulier on peut remplacer un indice latin par un indice grec, au moyen du tenseur fondamental h_s^ν. Par exemple, soit le tenseur $T_{\cdot s}^{\cdot \lambda}$. On a

$$(7) \qquad h_s^\tau T_{\cdot s}^{\cdot \lambda} = T^{\tau\lambda}.$$

On peut ainsi passer des composantes locales aux composantes du même tenseur dans le système de Gauss et inversement.

Enfin calculons l'élément de volume dans cette nouvelle théorie. Cette importante quantité a pour expression dans la théorie de la relativité générale

$$d\Omega = \sqrt{g} \cdot d\tau$$

où

$$g = |g_{\mu\nu}| \qquad \text{et} \qquad d\tau = dx^1 \cdot dx^2 \cdots$$

Or, on a

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu s} \cdot h_{\nu s} \qquad \text{et} \qquad g = h^2 ;$$

donc

(8) $$d\Omega = hd\tau.$$

Le fait que l'irrationnelle a disparu est encore un avantage de la nouvelle théorie.

7. — Considérons maintenant le déplacement parallèle d'un vecteur A^μ. Dans une multiplicité riemannienne ce déplacement est donné par la formule

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta.$$

Les $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ sont les crochets de CHRISTOFFEL et doivent satisfaire à deux conditions :

1° La translation qu'ils définissent doit conserver la métrique, c'est-à-dire laisser invariante la longueur des vecteurs considérés et

2° Les $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ doivent être symétriques en α et β

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}.$$

Dans cette géométrie, le déplacement parallèle n'est pas intégrable. Si on l'effectue le long d'une courbe fermée, le vecteur initial ne coïncide pas avec le vecteur final et la différence est mesurée par le tenseur de RIEMANN $R^i_{k,lm}$.

Dans la nouvelle théorie, les choses se présentent différemment. Le déplacement parallèle d'un vecteur A est donné par une formule analogue

(9) $$\delta A^\mu = \Delta^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \delta x^\beta.$$

Mais ici le déplacement est intégrable : si on déplace un vecteur le long d'une courbe fermée, le vecteur initial coïncidera toujours avec le vecteur final. Le tenseur de RIEMANN formé à partir des $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$ sera par conséquent identiquement nul. De plus les $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$ ne sont plus symétriques en α et β. On vérifie aisément ces résultats en calculant l'expression des $\Delta^\mu_{\alpha\beta}$ en fonction des h.

Soient deux points voisins x^β et $x^\beta + dx^\beta$; leurs n-podes sont « parallèles » entre eux. Les vecteurs A_s et $A_s + \delta A_s$ seront parallèles s'ils ont mêmes composantes dans les deux n-podes. La condition du déplacement parallèle de x^β en $x^\beta + dx^\beta$ est donc $\delta A_s = 0$.

En exprimant A_s en fonction des composantes de A dans le système de GAUSS

$$A_s = h_{s\mu}A^{\mu}$$

on a

(10) $$\delta(h_{s\mu}A^{\mu}) = 0.$$

En multipliant par $h_s{}^{\sigma}$ on déduit

(11) $$0 = h_s{}^{\sigma} \left\{ h_{s\mu}\delta A^{\mu} + A^{\alpha} \cdot \frac{\partial h_{s\alpha}}{\partial x^{\beta}} \delta x^{\beta} \right\}$$

ou, en désignant par une virgule (,) la dérivation ordinaire

(12) $$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h_s{}^{\mu} h_{s\alpha,\,\beta}$$

et aussi

(13) $$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = - h_{s\alpha} h_s{}^{\mu}{}_{,\beta}.$$

Par le même mécanisme que celui utilisé dans le calcul différentiel absolu, on peut former, à partir des $\Delta^{\mu}_{\alpha\beta}$ l'opérateur de la dérivée covariante. En le désignant par un point-virgule (;), on a, pour un tenseur du premier rang, contrevariant

(14) $$A^{\mu}{}_{;\sigma} = A^{\mu}{}_{,\sigma} + A^{\alpha}\Delta^{\mu}_{\alpha\sigma}$$

et pour un tenseur du premier rang covariant

(15) $$A_{\mu;\,\sigma} = A_{\mu,\,\sigma} - A_{\alpha}\Delta^{\alpha}_{\mu\sigma}.$$

On trouve des formules analogues pour les tenseurs d'un rang plus élevé. Elles sont pareilles aux formules du Calcul différentiel absolu fondé exclusivement sur la métrique, et se déduisent de la même façon.

On constate facilement que la dérivée covariante du tenseur fondamental est identiquement nulle

(16) $$h_s{}^{\nu}{}_{;\tau} = h_{s\nu;\,\tau} = g_{\sigma\tau;\,\rho} = g^{\sigma\tau}{}_{;\,\rho} \equiv 0.$$

On a, en effet

$$h^{\nu}_{s;\,\tau} = h^{\nu}_{s,\,\tau} + h^{\alpha}_s\Delta^{\nu}_{\alpha\tau} = \delta_{st}(h^{\nu}_{t,\,\tau} + h^{\alpha}_t\Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) = h^{\alpha}_s(h_{t\alpha}h^{\nu}_{t,\,\tau} + \Delta^{\nu}_{\alpha\tau}) \equiv 0$$

La dérivée covariante d'un produit de deux tenseurs s'obtient par

la règle ordinaire du calcul différentiel. On a, par exemple, T : et S : étant deux tenseurs de rang quelconque

(17) $$(T:S:)_{;\tau} = T:_{;\tau}S: + T:S:_{;\tau}.$$

Deux dérivations covariantes ne sont pas permutables, c'est-à-dire l'ordre des dérivations n'est pas indifférent. Soit un tenseur T : : quelconque. Prenons les dérivées covariantes successives, d'abord dans l'ordre σ, τ, ensuite dans l'ordre τ, σ et faisons la différence. Nous avons la formule fondamentale

(18) $$T::_{;\sigma;\tau} - T::_{;\tau;\sigma} \equiv - T::_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

où

$$\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}.$$

Il est facile de démontrer cette formule dans des cas simples. Supposons d'abord que T : : se réduise à un scalaire ψ. Dans ce cas la dérivée covariante se confond avec la dérivée ordinaire

$$\psi_{;\sigma} = \psi_{,\sigma}$$

et nous avons

$$\psi_{;\sigma;\tau} = \psi_{,\sigma,\tau} - \psi_{,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

$$\psi_{;\tau;\sigma} = \psi_{,\tau,\sigma} - \psi_{,\alpha}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}$$

$$\psi_{;\sigma;\tau} - \psi_{;\tau;\sigma} = -\psi_{,\alpha}(\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\sigma}) = -\psi_{;\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

La différence a bien la forme annoncée. On reconnaît que $\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$ est un tenseur.

Le cas d'un vecteur $T:: = A^{\mu}$ se réduit au précédent, si nous tenons compte que dans cette théorie, le parallélisme à distance existe. L'existence de ce parallélisme entraîne, en effet, la possibilité de l'existence d'un champ uniforme de vecteurs (Parallel-Felder) ; il est possible d'imaginer qu'en chaque point de l'espace, il y ait un vecteur équipollent à un vecteur donné.

Cela étant, considérons un champ uniforme de vecteurs *arbitraires* a_{μ} ; on montre facilement que $a_{\mu;\sigma} = a^{\nu}{}_{;\sigma} = 0$. Formons avec le vecteur donné A_{μ}, le scalaire

$$\psi = A^{\mu} \cdot a_{\mu}.$$

A ce scalaire nous pouvons appliquer la formule établie plus haut pour

la différence D. Ensuite, en tenant compte de la règle de dérivation d'un produit, on a $\left(A^{\mu}_{\alpha\mu}\right)_{;\sigma} = a_{\mu}A^{\mu}_{;\sigma}$. Les quantités arbitraires a^{μ} sortent en facteurs et disparaissent, et finalement, on a une relation de la même forme

$$A^{\mu}_{;\sigma;\tau} - A^{\mu}_{;\tau;\sigma} \equiv - A^{\mu}_{;\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

qu'il est facile de généraliser pour un tenseur de rang quelconque.

8. — Une différence importante entre la théorie présentée ici et la théorie de RIEMANN mérite toute notre attention. Dans la théorie de RIEMANN, il n'y a pas de tenseur qui puisse s'exprimer uniquement au moyen des dérivées premières du tenseur fondamental. Dans la nôtre, la différence

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu} \tag{19}$$

est un tenseur qui ne contient que des dérivées premières. En outre, ce tenseur est remarquable parce que, dans un certain sens, il est l'analogue du tenseur de RIEMANN : *si* Λ *est nul le continu est euclidien.*

Ce résultat est facile à établir. On a d'après la formule donnée pour $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{s}(h_{s\mu,\nu} - h_{s\nu,\mu}) = 0.$$

En multipliant par h^{α}_{t} on en déduit, à cause de $h^{\alpha}_{s}h_{t\alpha} = \delta_{st}$

$$h_{t\mu,\nu} - h_{t\nu,\mu} = 0$$

$h_{t\mu}$ est donc de la forme

$$h_{t\mu} = \frac{\partial\psi_t}{\partial x^{\mu}}$$

Si nous prenons comme coordonnées de GAUSS justement les ψ_t, ce qui est possible, $\psi_t = x^t$, les

$$h_{t\mu} = \delta_{t\mu} = \begin{cases} 1 & t = \mu \\ 0 & t \neq \mu \end{cases}$$

sont des constantes ; elles peuvent se ranger dans un tableau dans lequel seuls les termes diagonaux sont égaux à 1, les autres étant nuls. Les $h_{s\mu}$, et les $g_{\mu\nu}$ étant constants, le continu est euclidien.

9. — Considérons la grandeur Λ qui va jouer dans la nouvelle théorie

un rôle fondamental. Il y a en tout $6 \times 4 = 24$ grandeurs Λ ; les h ne sont cependant qu'en nombre de 16. Donc il y a entre les divers Λ des relations qui doivent être satisfaites identiquement. Pour les trouver, partons de l'expression de Λ en fonction des Δ. Le déplacement parallèle étant intégrable, le tenseur « de courbure » analogue au tenseur de RIEMANN sera donc identiquement nul. Nous avons par conséquent

$$(20) \qquad \Delta^{\iota}_{\varkappa\lambda,\,\mu} - \Delta^{\iota}_{\varkappa\mu,\,\lambda} - \Delta^{\iota}_{\sigma\lambda} \cdot \Delta^{\sigma}_{\varkappa\mu} + \Delta^{\iota}_{\sigma\mu}\Delta^{\sigma}_{\varkappa\lambda} \equiv 0.$$

Permutons circulairement les indices $\varkappa$, λ, μ et faisons la somme ; ensuite introduisons la dérivée covariante au lieu de la dérivée ordinaire. On arrive ainsi à l'identité suivante pour les Λ :

$$(21) \quad (\Lambda^{\iota}_{\varkappa\lambda\,;\,\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\mu\,;\,\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\varkappa\,;\,\lambda}) + (\Lambda^{\iota}_{\varkappa\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\lambda\mu} + \Lambda^{\iota}_{\lambda\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\mu\varkappa} + \Lambda^{\iota}_{\mu\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\varkappa\lambda}) \equiv 0.$$

En contractant une fois par rapport à i et à μ et en posant $\Lambda^{\alpha}_{\mu\alpha} = \varphi_{\mu}$ on trouve une autre identité importante

$$(22) \qquad \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu\,;\,\alpha} - \left(\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\varphi_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) \equiv 0.$$

Pour en déduire une autre il faut faire appel à la règle de permutation des dérivées covariantes, qui s'exprime par

$$T^{\cdot}_{\cdot\,;\,\sigma\,;\,\tau} - T^{\cdot}_{\cdot\,;\,\tau\,;\,\sigma} = - T^{\cdot}_{\cdot\,;\,\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Introduisons une nouvelle notation : convenons qu'un indice souligné signifie un indice changé de place, c'est-à-dire élevé ou abaissé. Par exemple, écrire $\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ signifie prendre les composantes contrevariantes de $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau}.$$

Avec cette convention, appliquons la règle précédente à $\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ en la dérivant par rapport à ν et à α. On a

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu;\,\nu;\,\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu;\,\alpha;\,\nu} \equiv - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu;\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha}.$$

Le second membre peut s'écrire

$$- \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu;\,\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha} \equiv - (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha})_{;\,\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha\,;\,\sigma}.$$

Dans le premier terme du second membre changeons le nom des indices muets σ, α et ν en α, σ et τ ; ce terme devient :

$$-(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma})_{;\alpha} \equiv +(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\alpha}.$$

On a donc

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu;\alpha} - (\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha;\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\sigma} \equiv 0$$

ou

(23) $$(\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau})_{;\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha;\nu} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}\Lambda^{\sigma}_{\nu\alpha;\sigma} \equiv 0$$

qui constitue l'identité cherchée. Introduisons les notations :

$$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\alpha}.$$

L'identité (23) s'écrit alors

(24) $$G^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - F^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}}F_{\nu\alpha} \equiv 0.$$

10. — Ayant défini la manière de décrire mathématiquement la structure de l'espace, examinons maintenant le problème fondamental de la théorie, qui est l'établissement des équations du champ. Comme dans la théorie de la relativité générale, ce problème consiste à trouver les conditions les plus simples qu'on puisse imposer aux éléments définissant la structure de l'espace, c'est-à-dire aux grandeurs $h_s{}^{\nu}$. Il s'agit donc d'un choix à faire parmi diverses possibilités ; la difficulté de ce choix réside en l'absence de points de repère qui puissent nous guider. Avant d'écrire les équations définitives du champ, il me semble intéressant d'indiquer le chemin que j'ai suivi pour les découvrir.

Mon point de départ a été constitué par les identités auxquelles satisfont les grandeurs $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$. D'une façon générale, la recherche de certaines identités peut être d'un grand secours pour le choix des équations du champ, en nous suggérant des formes possibles pour les relations cherchées. L'étude de ces identités doit donc logiquement précéder le choix du système d'équations. Mais on ne peut pas savoir, *a priori*, quelles sont les grandeurs entre lesquelles il faut établir des identités.

Un premier point de repère qui apparaît ici, semble être le suivant :

les relations cherchées devront vraisemblablement contenir $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu}$ et ses dérivées, ce tenseur étant le seul qui puisse s'exprimer uniquement en fonction des dérivées premières du tenseur fondamental.

La condition la plus simple à imposer serait

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu} = 0.$$

Il est évident que cette condition est trop restrictive : l'espace serait euclidien. De plus, *elle ne contient que des dérivées premières* et il est vraisemblable que les équations qui régissent les phénomènes naturels sont du second ordre, comme par exemple, l'équation de POISSON.

Essayons alors de poser

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu\,;\,\sigma} = 0.$$

Cette relation n'est pas acceptable non plus, car elle est presque équivalente à la première ; mais elle est utile parce qu'elle nous suggère immédiatement d'essayer à annuler les divergences qu'on peut former à partir de $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu\,;\,\sigma}$. Partons donc de cette dérivée covariante et contractons-la de toutes les manières possibles (ce qui équivaut à prendre la divergence). Nous avons deux possibilités :

soit

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu\,;\,\alpha} = 0 \tag{25}$$

soit

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu}\nu\,;\,\nu} = 0. \tag{26}$$

On voit immédiatement que l'ensemble de ces systèmes ne saurait convenir, parce que le nombre des équations ne peut pas être choisi arbitrairement : on ne peut pas garantir sans étude spéciale, la compatibilité de ces équations. Or, il est indispensable que le système choisi soit tel que les équations soient compatibles.

11. — En général, pour un espace à n dimensions, il y a n^2 variables $h_s{}^{\nu}$. Mais dans une théorie covariante générale, le choix du système de coordonnées étant arbitraire, n variables parmi les n^2, peuvent être prises arbitrairement. Par conséquent, le nombre des équations indépendantes sera $n^2 - n$. Le nombre des équations pourra même être plus grand que $n^2 - n$, pourvu qu'elles soient reliées par un nombre

convenable d'identités qui rendent le système compatible. En tout cas, le système devra satisfaire à la règle que l'*excès du nombre d'équations sur celui des identités soit égal au nombre des variables diminué de n.*

Considérons par exemple les équations de la relativité générale. Nous avons 10 fonctions inconnues $g_{\mu\nu}$; le système de coordonnées étant arbitraire, nous pouvons le choisir de telle façon que 4 des fonctions $g_{\mu\nu}$ soient quelconques. Les 6 inconnues auront donc à satisfaire à 10 équations. Mais, comme on le sait, on a en même temps les 4 identités

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R\right)_{;k} \equiv 0$$

qui rétablissent la compatibilité (1).

On peut citer d'autres cas pour lesquels le nombre d'équations surpasse le nombre des inconnues, sans que les équations soient incompatibles. Les équations de MAXWELL, par exemple

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \qquad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

sont au nombre de 8 avec 6 inconnues ; le système est cependant compatible, les équations étant reliées par deux identités bien connues.

Que signifie, au fond, la présence d'un nombre plus grand d'équations que d'inconnues ?

Dans l'exemple choisi, les deux équations vectorielles de MAXWELL déterminent canoniquement le problème. Si les champs E et H sont donnés à l'instant t, tout le reste est déterminé. Mais les autres relations scalaires font que les conditions initiales ne sont pas arbitraires. Donc, une plus forte détermination du problème, un nombre d'équations plus grand que le nombre d'inconnues (avec, toutefois, les identités qui les rendent compatibles), lève dans ce cas, en partie, l'arbitraire qui existait pour les conditions initiales. Il est d'ailleurs clair, qu'une théorie compatible avec l'expérience est d'autant plus satisfaisante qu'elle limite d'une façon plus complète cet arbitraire. Ceci dit, revenons à notre problème.

12. — Pour un espace à 4 dimensions, $n = 4$, nous avons 16 inconnues

(1) Le symbole " ; " est ici employé dans une signification bien connue, différente de celle qui est définie dans le reste de cet article.

$h_s{}^\nu$ dont quatre arbitraires, donc seulement 12 qui devront être déterminées par les équations du champ. Le nombre des équations, qui à première vue, formaient un système convenable était de 22, à savoir 6 équations (25) et 16 équations (26). Il nous faudrait donc 10 identités, qui dans ce cas n'existent pas. On comprend de cette façon comment la condition de compatibilité nous permet de limiter, d'une manière efficace, l'arbitraire dans le choix des équations du champ.

Examinons alors l'identité (24). Elle nous suggère de prendre comme équations du champ, le système

(27) $$G^{\mu\alpha} = 0$$

(28) $$F^{\mu\alpha} = 0$$

ou explicitement

(27 *a*) $$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0$$

(28 *a*) $$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha} = 0$$

Ce système, peu différent du système (25), (26) est constitué toujours par 22 équations, mais choisies de façon à satisfaire aux 4 identités (24).

Néanmoins, l'excès 22 — 4 = 18 est toujours plus grand que la différence 16 — 4 = 12. Pour que le nouveau système d'équations soit compatible, il faut qu'entre ses équations, il existe encore 6 identités supplémentaires. Nous prouverons que ces identités nécessaires existent. Pour le montrer, donnons d'abord aux équations (28) une autre forme, équivalente à la première, en nous guidant sur l'identité (22)

(22) $$\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} - (\varphi_{\mu,\,\nu} - \varphi_{\nu,\,\mu}) \equiv 0.$$

Nous avions posé $\Lambda^{\alpha}_{\mu\nu;\,\alpha} = 0$; d'après (22) il résulte qu'on a aussi

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Donc φ_μ est la dérivée d'un scalaire, qu'il est commode de désigner ici par $\log\psi$

$$\varphi_\mu = \frac{\partial \log \psi}{\partial x^\mu}.$$

Posons donc

$$F_\mu = \varphi_\mu - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^\mu} ;$$

on a $F_\mu = 0$. Nous pouvons alors remplacer les équations

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\alpha} = 0$$

par les équations $F_\mu = 0$ et écrire notre système d'équations comme suit :

(29) $$G^{\mu\alpha} = 0$$

(30) $$F_\mu = 0$$

ou

(29 *a*) $$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu};\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = 0$$

(30 *a*) $$\varphi_\mu - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^\mu} = 0.$$

Nous avons maintenant 16 équations (29) et 4 équations (30), donc en tout, 20 équations. Nous avons introduit une nouvelle variable, le scalaire ψ ; il y a donc $16 + 1 = 17$ inconnues, dont 4 arbitraires. Pour que le système soit compatible, il faudrait qu'il y eût entre les $G^{\mu\alpha}$ et F_μ

$$20 - (17 - 4) = 7$$

7 identités. Nous n'en avons trouvé que 4, les identités (24). Or, il existe encore des identités entre les grandeurs envisagées et, — miraculeusement on peut dire, — il y en a juste trois. Je ne saurais dire quelle est la raison profonde de leur existence. Elle tient essentiellement à la nature de l'espace envisagé. Ce type d'espace a été, d'ailleurs, envisagé, avant moi, par des mathématiciens, notamment par Weitzenböck, Eisenhart et Cartan ; j'espère qu'ils voudront bien nous aider à découvrir l'origine cachée de ces nouvelles identités.

Quoi qu'il en soit, elles existent ; je vais vous indiquer comment on peut y arriver.

Décomposons le tenseur $G_{\mu\alpha}$ en ses parties symétrique $\underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$ et antisymétrique $\underline{G}^{\mu\alpha}$. On a

$$\left\{\begin{aligned} 2\underline{G}^{\mu\alpha} &= (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} - \Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} \\ &= (\Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}})_{;\,\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} + \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}. \end{aligned}\right.$$

puisque les $\Lambda^{\mu}_{\underline{\alpha\nu}}$ sont antisymétriques en α, ν.

On peut exprimer $2\underline{G}^{\mu\alpha}$ en fonction de $F^{\mu\alpha} = \Lambda^{\nu}_{\mu\alpha;\nu}$ et d'un tenseur antisymétrique par rapport à un couple quelconque des indices α, μ, ν :

(31) $$S^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} = \Lambda^{\alpha}_{\underline{\mu\nu}} + \Lambda^{\nu}_{\underline{\alpha\mu}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\nu\alpha}}.$$

On a évidemment

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = S^{\nu}_{\underline{\alpha\mu};\nu} + F^{\mu\alpha} + C$$

le terme complémentaire C étant donné par

$$C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}.$$

Pour le calculer, observons qu'en échangeant les indices muets σ et τ, on a

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\tau\sigma} = -\Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}$$

et

$$\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}}\Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma} = -\Lambda^{\sigma}_{\underline{\mu\sigma}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

D'autre part, nous avons l'égalité

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}$$

à cause de

$$\Lambda^{\alpha}_{\underline{\tau\sigma}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}g^{\beta\tau}g^{\gamma\sigma}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\Lambda^{\mu}_{\underline{\gamma\beta}} = \Lambda^{\alpha}_{\tau\sigma}\Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}.$$

Donc

$$-C = \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\alpha}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}} + \Lambda^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}})\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}$$
$$- \frac{1}{2}(\Lambda^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}} + \Lambda^{\tau}_{\underline{\mu\sigma}} + \Lambda^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}})\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

$$-C = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

Donc finalement

(32) $$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\nu} + \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} + F^{\mu\alpha}.$$

Développons la dérivée covariante (les indices soulignés sont contrevariants). On a

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\nu} = S^{\tau}_{\underline{\alpha\mu};\tau} = S^{\tau}_{\underline{\alpha\mu},\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}\Delta^{\tau}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Delta^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Or, en échangeant σ et τ

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2}(S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}}\Delta^{\alpha}_{\sigma\tau} + S^{\sigma}_{\underline{\tau\mu}}\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma})$$
$$= \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}(\Delta^{\alpha}_{\tau\sigma} - \Delta^{\alpha}_{\sigma\tau}) = -\frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau}$$

parce que

$$S^{\tau}_{\underline{\sigma\mu}} = S^{\mu}_{\underline{\tau\sigma}} = S^{\sigma}_{\underline{\mu\tau}}$$

et aussi

$$S^{\tau}_{\underline{\alpha\sigma}}\Delta^{\mu}_{\sigma\tau} = S^{\sigma}_{\underline{\alpha\tau}}\Delta^{\mu}_{\tau\sigma} = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}(\Delta^{\mu}_{\sigma\tau} - \Delta^{\mu}_{\tau\sigma}) = \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau}.$$

Donc

$$-S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha};\nu} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\nu} + \frac{1}{2}S^{\alpha}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\mu}_{\sigma\tau} - \frac{1}{2}S^{\mu}_{\underline{\sigma\tau}}\Lambda^{\alpha}_{\sigma\tau} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Delta^{\nu}_{\sigma\nu},$$

par conséquent

$$2\underline{G}^{\mu\alpha} = -S^{\nu}_{\underline{\mu\alpha},\nu} - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\Delta^{\nu}_{\sigma\nu} + F^{\mu\alpha}. \tag{33}$$

Calculons le terme $\Delta^{\nu}_{\sigma\nu}$ d'après sa définition. On a

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \Delta^{\tau}_{\sigma\tau} - \Delta^{\tau}_{\tau\sigma}.$$

Or, en général, par définition

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{s}h_{s\alpha,\beta} \qquad \Delta^{\tau}_{\tau\sigma} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial \log h}{\partial x^{\sigma}}.$$

D'autre part nous avons posé

$$\Lambda^{\tau}_{\sigma\tau} = \varphi_{\sigma}$$

et

$$F_{\sigma} = \varphi_{\sigma} - \frac{\partial \log \psi}{\partial x^{\sigma}}.$$

Donc

$$\Delta^{\sigma}_{\sigma\tau} = \varphi_{\sigma} + \frac{\partial \log h}{\partial x^{\sigma}} = F_{\sigma} + \frac{\partial \log (\psi h)}{\partial x^{\sigma}}.$$

Substituons dans l'équation précédente, après l'avoir multipliée par ψh

$$\psi h(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha}) = \psi h S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu},\sigma} - \psi h F_{\sigma}S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} - \psi h\frac{\partial \log (\psi h)}{\partial x^{\sigma}}S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}.$$

En passant le deuxième terme dans le premier membre on a

$$\psi h(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}F_{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(\psi h S^{\sigma}_{\underline{\alpha\mu}}).$$

Or, si l'on dérive le second membre par rapport à α il s'évanouit, et nous avons les identités

$$(34) \qquad \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\psi h(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}} \cdot F_{\sigma})\right] \equiv 0.$$

En effet, le deuxième membre s'écrit, en changeant le nom des indices muets

$$\left(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\right)_{,\sigma,\alpha} = \left(h\psi S^{\alpha}_{\underline{\mu\sigma}}\right)_{,\alpha,\sigma} = -\left(h\psi S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}\right)_{,\alpha,\sigma}$$

puisque

$$S^{\alpha}_{\underline{\mu\sigma}} = - S^{\sigma}_{\underline{\mu\alpha}}.$$

Il n'y a que 3 *identités* (34) *indépendantes.* Si $A^{\mu\alpha}$ est un tenseur antisymétrique

$$A^{\mu\alpha} = - A^{\alpha\mu}$$

tel que

$$(A^{\mu\alpha})_{,\alpha} \equiv 0$$

on a

$$(A^{\mu\alpha})_{,\alpha,\mu} = (A^{\alpha\mu})_{,\mu,\alpha} = -(A^{\mu\alpha})_{,\mu,\alpha} \equiv 0.$$

Ceci est vrai quel que soit $A^{\mu\alpha}$ pourvu qu'il soit antisymétrique. Si nous prenons pour $A^{\mu\alpha}$ le premier membre de (34) nous avons une relation indépendante des valeurs qu'y prennent les $G^{\mu\alpha}$ et les F_{σ} ce qui diminue de 1 le nombre des identités indépendantes. Finalement le nombre de ces identités est de $4 + 3 = 7$, le nombre des équations 20, et le nombre des inconnues 17. On a

$$20 - 7 = 17 - 4$$

le système est donc compatible.

13. — On peut d'ailleurs chercher à prouver directement la compatibilité du système d'équations proposé. Pour cela, supposons que *toutes* les équations

$$G^{\mu\alpha} = 0 \qquad F_{\sigma} = 0$$

soient satisfaites pour une section x^4 = constante = a. Séparons-les en deux groupes : le premier contenant 13 équations [1]

$$F_1 = 0 \qquad F_2 = 0 \qquad F_3 = 0 \qquad F_4 = 0$$

$$G^{11} = 0 \qquad G^{12} = 0 \qquad G^{13} = 0$$

$$G^{21} = 0 \qquad G^{22} = 0 \qquad G^{23} = 0$$

$$G^{31} = 0 \qquad G^{32} = 0 \qquad G^{33} = 0$$

et le deuxième, les 7 autres. On peut facilement démontrer la proposition suivante : *Toutes les équations étant satisfaites dans une section $x^4 = a$, si les 13 équations du premier groupe sont satisfaites dans tout l'espace à 4 dimensions, les équations du deuxième groupe le sont aussi, automatiquement.*

En effet, on a

$$F_{\mu\alpha} = F_{\mu,\alpha} - F_{\alpha,\mu}$$

F_μ étant nul partout les $F_{\mu\alpha}$ le seront aussi.
Dans la section $x^4 = a$ on a

$$\frac{\partial \underline{G}^{\mu 4}}{\partial x^4} = 0$$

comme le montre l'identité

$$\text{(34)} \qquad \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[h\psi(2\underline{G}^{\mu\alpha} - \mathcal{F}^{\mu\alpha} + S^{\sigma}_{\underset{-}{\mu}\underset{-}{\alpha}} F_\sigma)\right] \equiv 0$$

Considérons une section infiniment voisine $x^4 = a + da$. Les $F^{\mu\alpha}$ et les F_σ étant nuls partout, on déduit de l'identité précédente que pour $\alpha = 4$, les $\underline{G}^{\mu\alpha}$ seront également nuls dans cette section. Un raisonnement analogue, utilisant l'identité

$$\text{(24)} \qquad G^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - F^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \Lambda^{\sigma}_{\underset{-}{\mu}\underset{-}{\tau}} F_{\sigma\tau} \equiv 0.$$

nous montre que la partie symétrique de $G^{\mu\alpha}$, $\underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$ s'annulera aussi pour $\alpha = 4$, dans la section infiniment voisine $x^4 = a + da$. La conclusion est donc valable pour

$$G^{\mu\alpha} = \underline{G}^{\mu\alpha} + \underline{\underline{G}}^{\mu\alpha},$$

dans une section $x^4 = a + da$, et peut s'étendre de proche en proche à tout l'espace.

(1) La compatibilité de ces 13 équations n'est pas douteuse.

14. — Examinons maintenant, autant qu'il sera possible, l'aspect physique de la théorie. Il est difficile de donner une interprétation physique des équations dans toute leur généralité ; on doit se borner à une première approximation.

Pour cela considérons un espace différant infiniment peu d'un espace euclidien. Ce dernier étant caractérisé par des $h_{s\nu}$ égaux à $\delta_{s\nu} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ (x^4 imaginaire), cela revient à poser

(35 *a*) $$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \bar{h}_{s\nu}$$

On déduit qu'il faut poser

(35 *b*) $$h_s^{\nu} = \delta_{s\nu} - \bar{h}_{\nu s}.$$

Nous remplacerons donc les $h_{s\nu}$ par cette expression dans les équations données et nous ne garderons que la première approximation. On aura

$$\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} = h_s^{\mu} h_{s\alpha,\,\beta} = \bar{h}_{\mu\alpha,\,\beta}$$
$$\Lambda^{\mu}_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\mu\alpha,\,\beta} - \bar{h}_{\mu\beta,\,\alpha}.$$

Les équations du champ seront alors

(36) $$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\mu,\,\nu} = 0$$

(37) $$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\alpha} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\mu,\,\alpha} = 0$$

ou

$$\begin{cases} \bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\nu,\,\mu} = 0 \\ \bar{h}_{\alpha\mu,\,\alpha,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\alpha,\,\mu} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation signifie simplement qu'on peut poser

(38) $$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\alpha} = \frac{\partial \chi}{\partial x^{\mu}}$$

de sorte que le système se réduit à

(39) $$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\nu,\,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\,\nu,\,\mu} = 0.$$

(40) $$\bar{h}_{\alpha\mu,\,\alpha} - \chi_{,\,\mu} = 0.$$

Cette forme n'est cependant pas très satisfaisante, parce qu'elle ne donne pas à première vue des renseignements suffisamment clairs sur le champ envisagé. Pour arriver à quelque chose de plus aisément interprétable, rappelons-nous que le système de coordonnées est arbitraire jusqu'à un certain point et faisons-lui subir une transformation infinitésimale

(41) $$x^{\mu'} = x^{\mu} - \xi^{\mu}$$

les ξ^μ étant des infiniment petits du premier ordre, que nous allons choisir convenablement pour que le système prenne une forme simple.

Appliquer la transformation infinitésimale revient à remplacer les $h_{\mu\nu}$ par

(42) $$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \xi^\mu_{,\nu}$$

(équation qui suit la règle de transformation des tenseurs).
On aura donc

$$\bar{h}'_{\alpha\nu,\nu} = \bar{h}_{\alpha\nu,\nu} + \xi^\alpha_{,\nu,\nu}$$

$$\bar{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = \bar{h}_{\alpha\nu,\alpha} + \xi^\alpha_{,\nu,\alpha}$$

Choisissons les ξ^μ de façon que ces deux grandeurs s'annulent dans le nouveau système de coordonnées. Je dis qu'il suffit de prendre

(43) $$\xi^\alpha_{,\nu,\nu} = -\bar{h}_{\alpha\nu,\nu}$$

(44) $$\xi^\alpha_{,\alpha} = -\chi.$$

En effet, on a d'abord

$$\xi^\alpha_{,\nu,\alpha} = \xi^\alpha_{,\alpha,\nu} = -\chi_{,\nu} = -\bar{h}_{\alpha\nu,\alpha}.$$

Ensuite ce système (43), (44) est compatible, quoique constitué par 5 équations pour 4 inconnues ; on a, en effet, la relation identique

$$(-\chi)_{,\nu,\nu} - (-\bar{h}_{\alpha\nu,\nu})_{,\alpha} \equiv 0.$$

Donc la résolution de ce système nous fournit les quantités ξ^μ telles que l'on ait

(45) $$\bar{h}'_{\alpha\nu,\nu} = 0.$$

(46) $$\bar{h}'_{\alpha\nu,\alpha} = 0.$$

Faisons donc ce changement de coordonnées. Nos équations deviennent (en supprimant les accents) :

(47) $$\left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0 \\ \bar{h}_{\alpha\mu,\alpha} = 0 \\ \bar{h}_{\alpha\mu,\mu} = 0 \end{array} \right.$$

Si nous décomposons les $\bar{h}_{\alpha\mu}$ en une partie symétrique $S_{\alpha\mu}$ et une

partie antisymétrique $A_{\alpha\mu}$, le système se décompose en deux autres ne contenant que des termes symétriques ou antisymétriques

$$(48) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S_{\alpha\mu,\nu,\nu} = 0 \\ S_{\alpha\mu,\mu} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} A_{\alpha\mu,\mu,\nu} = 0 \\ A_{\alpha\mu,\mu} = 0 \end{array}$$

Nous sommes arrivés ainsi à deux groupes d'équations. *Le groupe symétrique fournit les lois du champ de gravitation compatible avec la loi de* NEWTON-POISSON ; cependant le résultat n'est pas tout à fait identique à celui que donne la théorie basée sur la géométrie de RIEMANN. *Le groupe antisymétrique fournit les équations de* MAXWELL, sous une forme plus générale. Je crois effectivement que le système antisymétrique doit être interprété comme donnant les équations générales du champ électromagnétique (en première approximation).

Il existe donc dans ce cas une séparation bien nette entre les lois de l'électromagnétisme d'une part et celles de la gravitation d'autre part. Mais cette séparation n'est valable *qu'en première approximation* ; elle n'existe pas dans le cas général : le champ est régi par une loi unique.

Dans l'état actuel de la théorie on ne peut pas juger cependant si *l'interprétation* des grandeurs qui représentent le champ est correcte ou non. Un champ est en effet, défini en premier lieu par les actions motrices qu'il exerce sur des particules, et, actuellement on ne connaît pas la loi de ces actions ; la découverte de cette loi exige l'intégration des équations du champ, ce qui n'a pas encore été réalisé.

15. — Pour conclure, nous pouvons dire, en condensant les résultats que nous avons exposés jusqu'ici :

La structure particulière de l'espace que nous avons prise comme hypothèse fondamentale, nous a conduit à certaines équations générales du champ, qui se réduisent en première approximation aux équations bien connues de la gravitation et de l'électromagnétisme. Malgré cela, les résultats obtenus jusqu'à présent ne nous donnent pas la possibilité de vérifier expérimentalement les prévisions théoriques ; en effet, on n'a pas encore pu déduire par intégration, à partir des équations données, les lois de la structure des particules et de leur mouvement dans le champ. Le premier pas que la théorie devra commencer par franchir sera donc la découverte d'intégrales, — dépourvues de singularités, — satisfaisant aux équations différentielles du champ,

et susceptibles de fournir une solution correcte au problème des particules et de leur mouvement. Ce n'est qu'après cela que la comparaison avec l'expérience deviendra possible.

(Conférences données à l'Institut H. Poincaré en novembre 1929 et rédigées par Al. Proca).

La Théorie Ondulatoire de la Matière

PAR

C. G. DARWIN

Le problème de la théorie des quanta a été abordé par deux voies distinctes qui nous ont permis d'aboutir à une expression à peu près complète de cette théorie, en partant de points de vue tout-à-fait différents. Au moment où les nouvelles théories ondulatoires ont commencé à se développer, les physiciens, depuis plusieurs années déjà, avaient leur attention tournée vers la dynamique générale des particules ; d'autre part, beaucoup de jeunes savants étaient peu familiers avec la théorie classique des ondes, de telle sorte qu'il leur était plus naturel d'insister sur les analogies dynamiques que sur l'aspect ondulatoire des phénomènes. Au contraire, pour d'autres physiciens, tels que DE BROGLIE et SCHRÖDINGER, cet aspect ondulatoire était la caractéristique la plus importante du modèle proposé.

Le hasard de mes travaux antérieurs m'ayant beaucoup familiarisé avec la théorie des ondes, ma sympathie s'est tout naturellement portée vers l'exposé de DE BROGLIE, plutôt que vers les autres. Je ne veux en aucune façon laisser entendre par là qu'il existe une différence logique quelconque entre les deux aspects de la question : les principes fondamentaux, empruntés aussi bien à l'un qu'à l'autre, sont au-dessus de toute critique. Mais il nous faut bien autre chose que de simples principes fondamentaux : nous devons, en particulier, acquérir des formes de pensée qui nous permettent de prévoir des phénomènes trop compliqués pour qu'on puisse les traiter mathématiquement d'une

façon complète. Je crois que pour forger ces nouvelles formes de pensée, nous devrions tenir compte du fait que l'esprit humain est doué d'une très grande inertie, et aussi, pourrions-nous dire, d'une grande viscosité : il se déplace toujours très paresseusement d'une position d'équilibre à une autre, suivant un mode à peu près calqué sur l'une de ses propres créations : les processus thermodynamiques réversibles. Si nous voulons atteindre plus rapidement l'équilibre, nous devrons appliquer pendant un temps très court une force bien supérieure à celle qui est strictement nécessaire pour le réaliser. C'est pourquoi je crois que la meilleure ligne de conduite à adopter à l'heure actuelle est d'insister sur l'aspect ondulatoire de la théorie au détriment de son aspect dynamique, espérant parvenir de cette manière, dans le délai le plus court, à un juste milieu entre les deux.

Je ne vais pas tenter de donner ici un exposé complet des fondements de la théorie des quanta, mon but n'étant pas de fournir un développement logique de cette théorie, mais plutôt de la faire comprendre intuitivement, compréhension à laquelle on parvient par des exemples, beaucoup mieux que par des théorèmes généraux. Je veux également laisser de côté certaines questions d'actualité, extrêmement intéressantes, la question du moment magnétique de l'électron, par exemple, ou la théorie du rayonnement. Je désire insister avant tout sur une dualité essentielle de la théorie des quanta, dualité qui se manifeste par l'emploi de deux langages totalement différents dans les deux aspects de la théorie. Le premier aspect utilise l'analogie avec l'optique géométrique, et le langage des particules ; le second s'appuie sur l'analogie avec l'optique physique et emploie le langage des ondes. On ne peut se passer d'utiliser simultanément ces deux points de vue : celui qui dérive de l'optique physique est indispensable parce qu'il nous donne les éléments mathématiques de la solution ; le point de vue tiré de l'optique géométrique, de son côté, nous fournit le seul moyen de trouver un langage qui puisse décrire les événements. La méthode des matrices tend à cacher, dans une certaine mesure le côté physique des questions traitées, en les coulant dans un moule mathématique de forme peu familière : le sens physique y est masqué, car ce sont les longueurs et les moments, par exemple, qui sont accessibles à notre intuition, et non pas les matrices à partir desquelles on peut déduire, par des règles formelles, ces longueurs ou ces moments.

Voici comment nous pourrons utiliser les principes fondamen-

taux [1] : d'après certaines règles établies une fois pour toutes nous écrivons, pour traduire un phénomène donné, une certaine équation différentielle. Si le problème correspondant de la mécanique classique est décrit par un hamiltonien H (q, p) nous posons comme équation :

$$\text{(1)} \qquad H\left(q, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right)\Psi = ih\frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Dans certains cas l'ordre de p et de q dans H peut laisser subsister un doute sur la forme de l'équation (1). Ce doute ne subsiste plus quand nous traitons le problème des particules ; il semble n'avoir en fait qu'une importance secondaire, parce qu'il est généralement facile de voir comment on passe de H (q, p) à (1). Dans le cas ordinaire nous pouvons prendre pour (1) une équation de la forme :

$$\text{(2)} \qquad -\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = ih\frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Cette équation doit être résolue en tenant compte des conditions aux limites imposées et de la condition que Ψ soit partout fini. C'est habituellement la recherche de cette solution qui présente la plus grosse difficulté et paraît en conséquence la plus importante partie du problème ; cependant elle n'en constitue que la moitié : il nous reste encore en effet à relier le Ψ ainsi obtenu aux observations expérimentales. Il nous faut franchir là un pas tout à fait étranger à la suite logique des raisonnements, puisqu'il implique l'introduction du langage entièrement nouveau des corpuscules. Je reviendrai plus loin sur ce point qui est le plus important de toute la théorie des quanta. Partant de la quantité complexe Ψ, nous formons l'expression réelle $|\Psi|^2$ qui est une fonction de q et de t. Nous l'appelons *intensité* et nous la normalisons d'une façon convenable. L'expression primitive de Ψ contient en facteur une constante arbitraire sans intérêt. $|\Psi|^2\, dq$ doit représenter la probabilité pour qu'on trouve un électron dans la région dq, et, comme nous savons que l'électron se trouve certainement quelque part, nous choisirons cette constante arbitraire de façon que $\int |\Psi|^2 dq = 1$. L'expression $|\Psi|^2\, dq$ représentera alors la probabilité de trouver l'électron dans la région dq.

Ce sont là les conditions générales que doit remplir la solution d'un problème quelconque. Mais il y a deux points qui ont besoin

(1) Les méthodes ci-dessous sont discutées dans les *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 117, p 258, 1928

d'être discutés : d'une part le passage critique de la quantité Ψ aux éléments accessibles à l'expérience ; d'autre part l'absence de conditions restrictives à la forme de la solution de l'équation (2). Avant d'entamer cette discussion, il sera commode de donner un exemple de solution calculée d'après les indications générales qui précèdent.

Prenons un problème aussi simple que possible, le mouvement d'une particule libre dans l'espace en l'absence de toute force. Simplifions encore en ne considérant que le problème à une dimension. L'équation est alors :

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{3}$$

Il est inutile d'insister sur la méthode de calcul, qui dans ce cas est immédiate. La forme la plus simple de la solution est :

$$\Psi(x, t) = exp\left[\frac{i}{h}(px - \frac{p^2}{2m}t)\right]. \tag{4}$$

Si nous formons $|\Psi|^2$ nous obtenons la valeur 1 et l'intégrale que l'on utilise pour normaliser la fonction serait alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot dx.$$

Il y a donc une même probabilité élémentaire pour que la particule se trouve n'importe où, résultat vraiment peu intéressant. Nous choisirons donc une solution plus féconde en prenant

$$\Psi = \int \Phi(p) exp \frac{i}{h}(px - \frac{p^2}{2m}t)\, dp \tag{5}$$

Pour $t = 0$, on peut, en appliquant directement le théorème de Fourier, représenter par cette formule n'importe quelle fonction Ψ. Par exemple, si pour $t = 0$, $\Psi(x, 0) = f(x)$ on a

$$\Phi(p) = 2\pi h \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\frac{px}{h}} dx.$$

La valeur de Ψ à n'importe quel autre moment t est donnée par (5). La probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ est donc

$$|\Psi(x, t)|^2 dx = dx \int \Phi(p) e^{\frac{i}{h}(px - \frac{p^2}{2m}t)} dp \times \int \Phi^*(p') e^{-\frac{i}{h}(p'x - \frac{p'^2}{2m}t)} dp'$$

où le symbole Φ^* signifie la quantité imaginaire conjuguée à Φ.

En intégrant pour tout l'espace, cela donne :

$$\int |\Psi(x, t)|^2 dx = 2\pi h \int |\Phi|^2 dp$$

valeur indépendante du temps, ce qui exprime la conservation de la matière.

En général, il n'est pas possible d'éviter l'emploi des intégrales de FOURIER dont on se représente mal le sens physique. Pour mieux illustrer la méthode nous allons choisir la seule fonction Φ qui nous conduise à des intégrales toutes calculables : la fonction d'erreurs de GAUSS. Nous prendrons :

$$\Phi = exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{h^2}(p - mV)^2\right].$$

En effectuant l'intégration Ψ devient égal à :

$$\Psi = \frac{h\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma^2 + i\frac{ht}{m}}} exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x - Vt)^2}{\sigma^2 + i\frac{ht}{m}} + i\frac{mV}{h}(x - \frac{1}{2}Vt)\right]$$

qui, comme nous pouvons facilement vérifier, satisfait à l'équation (3).

L'intensité est :

$$|\Psi|^2 = \frac{2\pi h^2}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{m\sigma}\right)^2}} exp\left[-\frac{(x - Vt)^2}{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{m\sigma}\right)^2}\right]$$

et nous pouvons la caractériser grossièrement en disant qu'elle n'existe que dans le domaine :

$$Vt \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{ht}{m\sigma}\right)^2}.$$

Nous avons ainsi la représentation d'un paquet d'ondes ramassé à l'instant initial dans l'intervalle $\mp\sigma$, se propageant avec la vitesse V et s'étalant au fur et à mesure. Nous pouvons expliquer ce résultat de la manière la plus simple en disant qu'il existe une indétermination initiale de σ sur la position de la particule et de $\frac{h}{m\sigma}$ sur sa vitesse :

ces valeurs se combinent par leurs carrés suivant les règles ordinaires du calcul des probabilités. Notons encore *que si nous identifions p avec la quantité de mouvement*, nous obtenons la relation d'indétermination d'HEISENBERG (1) $\Delta x . \Delta p = h$. A vrai dire, le p que nous avons introduit n'est évidemment pas une quantité de mouvement, mais simplement la variable d'intégration d'une intégrale de FOURIER. L'identification de p avec une quantité de mouvement implique le passage de l'optique physique à l'optique géométrique, c'est-à-dire justement la transition critique dont nous avons parlé plus haut.

En examinant Ψ, nous voyons que la vitesse des ondes est 1/2 V, V étant la vitesse de groupe. Ceci est évidemment un cas particulier du théorème général de RAYLEIGH sur la vitesse de groupe :

$$V = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{mV^2}{h}\right)}{d\left(\frac{mV}{h}\right)}.$$

Cette valeur de la vitesse diffère beaucoup de la forme de DE BROGLIE ; cela tient à ce que par un changement approprié dans la forme de l'équation des ondes (1) nous avons omis dans l'expression de l'onde, le facteur $exp\left[-i\frac{mc^2}{h}t\right]$.

Il est à remarquer que nous n'avons imposé à la solution Ψ de l'équation des ondes aucune forme particulière. Quand la théorie mathématique fut proposée pour la première fois par SCHRÖDINGER, le second membre de l'équation (1) était remplacé par $W\Psi$ et les seules solutions admissibles étaient les fonctions « caractéristiques ». Mais le temps fut introduit comme variable indépendante ; dès lors la théorie suggéra qu'une solution quelconque de l'équation (1), comportant une somme arbitraire de fonctions caractéristiques — chacune multipliée par une exponentielle du temps, — devait être regardée comme tout aussi légitime qu'une solution caractéristique simple.

Je considère ce résultat comme un des traits caractéristiques les plus importants de la nouvelle théorie. Il est vrai qu'à l'heure actuelle une grande partie des résultats obtenus dans ce domaine sont exprimés dans le langage des fonctions caractéristiques. Mais en réalité, cela doit être attribué au génie de DIRAC (2) qui a développé une méthode

(1) *Zts. f. Physik*; vol. 43, p. 172, 1927.
(2) *Proc. Roy. Soc.*, vol. 113, p. 621, 1927.

de calcul extrêmement féconde, permettant de transformer l'équation des ondes de telle façon qu'une fonction quelconque, arbitrairement choisie, peut devenir fonction caractéristique. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet. Mais plaçons-nous à un point de vue plutôt physique que mathématique ; une importante constatation s'impose alors : les seules restrictions que nous puissions imposer à la solution choisie concernent son aptitude plus ou moins grande à traduire nos observations expérimentales. Dans l'étude des spectres par exemple, nous choisirons les fonctions associées à une valeur définie de l'énergie à cause des facteurs $e^{-i\frac{Wt}{h}}$, puisque c'est ainsi que nous obtiendrons l'analyse en fréquences donnée par le spectroscope. Mais dans beaucoup de cas nous avons une dégénérescence, plusieurs fonctions caractéristiques ayant la même énergie. Dans ce cas nous pouvons éviter une des difficultés sérieuses qui se présentaient dans l'ancienne théorie des quanta.

On avait en effet l'habitude de supposer qu'à l'instant où un atome doué d'un moment magnétique pénétrait dans un champ, si faible fût-il, il se plaçait instantanément soit parallèlement, soit antiparallèlement au champ ; c'était là un processus contraire à toutes nos conceptions habituelles de continuité et même en contradiction avec la stricte conservation de l'énergie. Au demeurant, c'était ce qu'on pouvait faire de mieux en se limitant à un atome dans un état unique. On formulait ainsi correctement la conception de l'existence de fonctions caractéristiques appropriées, pour l'atome dans le champ, mais on insistait sans nécessité sur la restriction qu'à l'atome ne devait être attachée qu'une seule de ces fonctions à la fois.

Aujourd'hui nous pouvons admettre que l'atome qui pénètre dans le champ possède simultanément les deux caractéristiques et nous trouvons qu'il décrit simplement un mouvement de précession, exactement comme l'envisage le théorème de Larmor. De cette façon nous éliminons complètement ce qu'il y avait d'artificiel, mais il faut reconnaître qu'au fond nous n'avons fait que reculer la difficulté. En effet, si le champ n'est pas uniforme, nous avons une expérience de Stern et Gerlach et les fonctions caractéristiques s'écarteront peu à peu l'une de l'autre ; cela ne signifie cependant pas que l'atome soit coupé en deux morceaux. Il faut nous rappeler que nous ne devons envisager des atomes isolés que dans le cas où nous sommes en état de

les identifier par certaines expériences et que toute expérience de ce genre empêchera la vérification de l'effet STERN-GERLACH.

L'un des meilleurs exemples pour illustrer les raisonnements précédents est fourni par la théorie de la radioactivité de GAMOW. Dans cette théorie le noyau de l'atome est conçu comme l'analogue d'un mur sphérique qui réfléchit l'onde α comme dans le phénomène de la réflexion totale interne de la lumière. Si le mur était d'une épaisseur infinie, l'onde resterait toujours à l'intérieur de l'enceinte et ne pourrait pas en sortir ; mais comme cette épaisseur est finie une petite partie de l'onde le traverse ; ceci correspond à une probabilité d'émis-

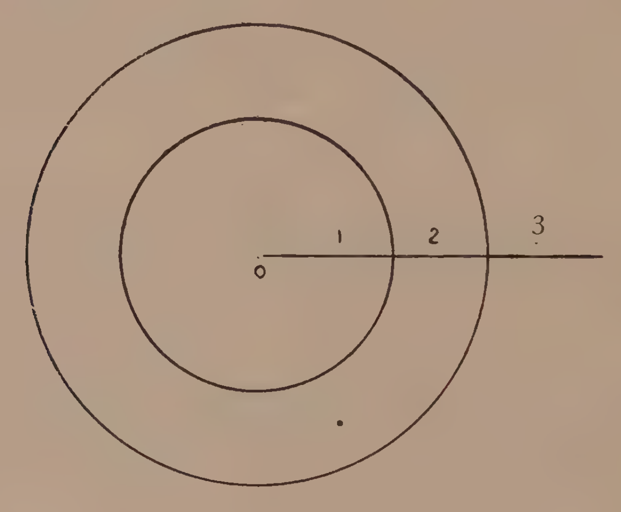


Fig. 1.

sion très faible pour la particule α. Le calcul est analogue à celui de l'interféromètre en optique.

Dans les régions 1 et 3 nous avons :

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi = ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

et dans 2 :

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Prenons V = constante ; en raison de la symétrie sphérique nous pouvons choisir pour solution :

$$\Psi_1 = \frac{1}{r} \text{A} \sin kr\, e^{-i\frac{\text{W}}{h}t}$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{r} \left\{ \text{B} \cosh k'r + \text{C} \sinh k'r \right\} e^{-i\frac{\text{W}}{h}t}$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{r} \text{D} e^{i(kr - \frac{\text{W}}{h}t)}$$

avec

$$k^2 = \frac{2\text{W}m}{h}, \qquad k'^2 = \frac{2(\text{V} - \text{W})m}{h}$$

en supposant V > W ; Ψ et $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ sont continus sur les surfaces de séparation. Cette solution représente un Ψ fini en 1 et des ondes qui s'éloignent dans 3 ; nous pouvons déterminer les rapports entre A B C D par les conditions de continuité de Ψ.

Ces conditions ne peuvent être satisfaites que si l'on suppose que k, et donc W, ont une partie imaginaire. La partie imaginaire de W fournit la constante de désintégration. Il est tout-à-fait possible de traiter ces fonctions comme fonctions caractéristiques, mais ceci n'est qu'une conception purement mathématique sans utilité physique ; en effet cela exige que l'énergie soit en partie imaginaire, ce qui est difficilement conciliable avec l'idée habituelle que nous nous faisons de cette grandeur.

Nous arrivons maintenant à la question plus importante de toutes, *l'interprétation des résultats* au moyen de laquelle s'effectue la transition entre ce que j'ai appelé optique physique et optique géométrique.

Depuis le début même de la théorie des quanta on a constaté la présence inévitable d'une sorte de discontinuité logique dans la suite des idées. Au début, cet état de choses paraissait provenir simplement d'une incompatibilité des notions utilisées, d'une faute de logique inexcusable. Mais on s'est aperçu, à la suite des développements récents et principalement sous l'influence des idées de Bohr (1), que

(1) Conférence sur l'état actuel de la théorie des quanta, faite à Côme le 16 septembre 1927, à l'occasion des fêtes jubilaires en l'honneur de Volta.

les deux aspects des phénomènes qui paraissaient incompatibles sont en réalité complémentaires. En regardant les choses d'un peu plus près, nous constatons effectivement que deux propositions A et B seraient incompatibles si elles devaient être vraies simultanément, mais que la vérification de A exclut automatiquement la vérification simultanée de B. L'exemple le plus célèbre de cet état de choses est formulé dans le principe d'indétermination de HEISENBERG. Nous avons montré comment ce principe se déduit d'une façon toute naturelle de l'aspect ondulatoire des phénomènes, mais nous avons indiqué en même temps que cet aspect particulier ne nous permettait qu'une analyse incomplète. Nous étions obligé d'ajouter à ce que nous avions établi, une hypothèse nouvelle, celle que p était « réellement » une quantité de mouvement, au lieu d'être simplement la variable d'intégration d'une intégrale de FOURIER.

L'idée fondamentale de cette dualité est cependant beaucoup plus profonde que celle qui nous conduirait à associer simplement les variables par paires pour en faire des variables dynamiques conjuguées. Il est impossible d'exprimer un phénomène quelconque relevant de la dynamique atomique sans faire intervenir ces deux aspects. Les conceptions qui s'y rattachent ne doivent pas être mélangées, mais le passage des unes aux autres peut se faire à des moments très différents. Nous devons poser le problème dans le langage de l'optique géométrique, parce que celle-ci est analogue à la dynamique macroscopique, la seule accessible à notre intuition ; le calcul doit être poursuivi dans le langage de l'optique physique ; mais les résultats doivent être de nouveau exprimés dans celui de l'optique géométrique. Cependant les points où se font les passages entre les deux optiques sont largement arbitraires. Par exemple, nous pouvons dire que Ψ appartient au domaine de l'optique physique et $|\Psi|^2$ à celui de l'optique géométrique, séparation qui convient, par exemple, à l'étude de l'effet STERN-GERLACH ; comme on le voit cela constitue une bifurcation très différente de la précédente et qui démontre la grande généralité des choix qu'il est possible de faire.

Dans une question aussi générale et avec une telle étendue d'arbitraire il n'est pas facile — ni peut-être souhaitable — d'être très précis ; il ne peut y avoir cependant de doute sur l'importance et la beauté des conceptions de BOHR.

***

Les notions de quantité de mouvement, d'énergie, etc., jouent un rôle très important en dynamique ; elles ont également trouvé leur place dans la théorie des quanta telle qu'elle a été construite par HEISENBERG et plus particulièrement dans la forme que lui a donné DIRAC. Dans l'exposé précédent, ces mêmes notions ne jouaient aucun rôle et pourtant dans chaque exemple, nous avons eu effectivement quelque chose à dire sur les moments, l'énergie, etc. Je me propose maintenant de montrer d'une façon plus générale la manière dont les grandeurs de ce genre apparaissent dans l'aspect ondulatoire de la théorie.

On comprendra mieux le principe général de cette explication si on considère l'analogie suivante avec la théorie classique. Étant donné un champ électromagnétique arbitraire, comment calculons-nous l'énergie électromagnétique contenue dans chaque élément de volume ? Pour cela nous prenons un domaine fermé et nous exprimons l'énergie totale qu'il contient et qui est une quantité parfaitement définie ; ensuite nous transformons cette quantité en une intégrale de volume dont la valeur est

$$\int \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)dxdydz.$$

Nous disons alors que par définition $\frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$ est l'énergie contenue dans l'élément de volume $dx\, dy\, dz$.

Supposons maintenant que nous voulions analyser un rayonnement en fixant notre attention sur la fréquence, comme nous avons à le faire, par exemple, en thermodynamique. Dans ce cas nous transformons notre énergie *totale* en l'exprimant au moyen d'une intégrale de FOURIER de la forme $\int u_\nu d\nu$, ou ν est la fréquence ; u_ν est alors *par définition* l'intensité pour une fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$.

Cette analogie nous indique la marche à suivre. En partant de la règle fondamentale qui donne l'intensité, $|\Psi|^2dq$ sera pour nous la probabilité pour que l'atome se trouve aux environs du point q. $\int|\Psi|^2dq$ sera alors la probabilité totale que nous poserons égale à 1, exprimant par là que l'atome se trouve certainement dans le domaine considéré.

Si maintenant nous transformons cette intégrale par un changement de variable, elle restera égale à l'unité et la quantité sous le signe $\int$ de la deuxième intégrale donnera par définition la distribution de probabilités relative à la nouvelle variable. Nous en avons donné déjà un exemple particulier pour le passage des coordonnées aux moments ; nous n'avons rien fait d'autre que d'introduire une intégrale de FOURIER.

Par exemple, pour un seul degré de liberté :

$$\Psi(q, t) = \int \Psi(p, t) e^{\frac{iqp}{h}} dp$$

définit une fonction $\Psi\ (p, t)$ qui peut être évaluée par inversion. On a alors d'après le théorème de FOURIER

$$\int |\Psi(q, t)|^2 dq = \int dq \int dp \int dp' \Psi(p,t) \Psi^*(p', t) e^{i\frac{q}{h}(p-p')}$$

$$= 2\pi h \int dp\, |\Psi(p, t)|^2.$$

On en déduit que la probabilité pour que le moment soit compris entre p et $p + dp$ est égale à

$$|\Psi(p, t)|^2 \times 2\pi h.$$

Un exemple plus important est celui de l'énergie ; cherchons des solutions de la forme de SCHRODINGER.

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n(q) e^{-i\frac{W_n}{h}t}$$

le nombre de degrés de liberté étant quelconque, et les Ψ_n satisfaisant aux conditions d'orthogonalité

$$\int \Psi_n \Psi_m^* dq = 0.$$

Alors

$$\int |\Psi|^2 dq = \int \sum_n C_n \Psi_n(q) e^{-i\frac{W_n}{h}t} \times \sum_m C_m^* \Psi_m^*(q) e^{i\frac{W_m}{h}t} dq$$

$$= \sum_n |C_n|^2 \int |\Psi_n|^2 dq.$$

Par définition nous pouvons dire alors que le n^{me} terme représente la probabilité pour que l'atome se trouve dans le n^{me} niveau d'énergie.

Un autre cas important apparaît quand on introduit les coordonnées polaires ou leurs conjuguées ; pour deux dimensions, par exemple, nous pouvons exprimer directement $\Psi(x,y,t)$ en coordonnées polaires par $\Psi(r, \theta, t)$, mais la nouvelle fonction doit avoir une valeur unique et bien déterminée dans tout l'espace. Elle ne peut donc être une fonction de θ tout à fait arbitraire. On en déduit immédiatement que la probabilité pour que les coordonnées se trouvent aux environs des valeurs r, θ, est donnée par l'expression

$$|\Psi(r, \theta, t)|^2 r dr d\theta.$$

Il est cependant beaucoup plus intéressant de considérer le développement conjugué. Celui-ci s'obtient simplement en reconnaissant que $\Psi(r, \theta, t)$ doit être périodique en θ et en développant la fonction périodique en une somme de sinus et de cosinus :

$$\Psi(x, y, t) = \sum_m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)\Psi_m(r, t).$$

Dans ce cas

$$\int |\Psi|^2 dx dy = \pi \sum_m (|a_m|^2) + (b_m|^2) \int |\Psi_m|^2 r dr$$

et nous pouvons dire que $|a_m|^2 + |b_m|^2$ est la probabilité pour que l'atome se trouve dans l'état caractérisé par le nombre quantique azimutal m. Il est évident qu'entre m et θ il y a une relation du type de celle qui existe en dynamique entre deux variables conjuguées ; cependant on ne voit pas directement pourquoi nous sommes obligés d'associer la variable m à la notion de moment de quantité de mouvement.

De même si nous examinons le problème pour l'espace à trois dimensions, nous sommes conduits à exprimer $\Psi(x, y, z, t)$ par

$$\sum_{l,m} \int a_{lm} P_l^m(\theta, \varphi)\Psi_{lm}(r, t) r^2 dr$$

où $P_l^m(\theta, \varphi)$ sont les polynomes de Legendre, expressions fastidieuses ayant un grand nombre de propriétés simples qu'il n'est jamais possible de se rappeler entièrement. Dans ce cas il est encore plus diffi-

cile de reconnaître la relation qui existe entre lesnombres l, m et les moments angulaires.

Nous pouvons transformer l'expression $|\Psi(x, y, z, t)|^2\, dx\, dy\, dz$ en un grand nombre d'intégrales variées contenant, par exemple, x et p_y, p_x et p_y, r et θ, r et m, p et m, p_r et θ, mais cela n'est pas absolument arbitraire; nous ne pouvons pas par exemple, utiliser en même temps r et p_x. L'impossibilité de l'existence d'une telle transformation, est plutôt d'ordre mathématique, mais peut être associée avec un des traits caractéristiques les plus importants du calcul d'HEISENBERG. Pour préciser, nous ne pouvons transformer $\int|\Psi|^2 dq_1 dq_2$ en une autre intégrale $\int|\Psi|^2 dQ_1 dQ_2 ...$ que si les variables $Q_1 Q_2$ sont permutables entre elles quand elles sont exprimées en fonctions de $q_1 q_2$. Il est facile d'en voir la raison. Par exemple, r et p_x ne sont pas permutables ; il est clair alors que nous ne pouvons pas parler de probabilités simultanées pour r et p_x, puisque nous obtiendrons des valeurs différentes si nous fixons notre attention d'abord sur r et ensuite sur p_x ou réciproquement.

La méthode générale pour trouver les variables qui conviennent à la transformation de l'expression $\int|\Psi|^2 dxdydz$ a été donnée par DIRAC, sous une forme différente de celle qui est présentée ici. DIRAC insiste sur les analogies dynamiques et décrit cette transformation comme passage d'un système où q est une matrice diagonale $q(q'q'') = q'\delta(q' - q'')$ à une autre dans lequel c'est $F(q, p)$ qui devient matrice diagonale. Dire que q est une matrice diagonale revient à dire que q est la variable indépendante de l'équation des ondes. Nous voulons donc faire une transformation aboutissant à une équation où $P = F(q, p)$ sera pris comme variable indépendante.

La règle de DIRAC prescrit d'écrire l'équation différentielle

$$F\left(q, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right)\chi = P\chi$$

et de la résoudre en regardant P comme constante. La solution sera une fonction $\chi(q, P)$ et il est facile de prouver que pour des fonctions F d'un type très général les χ forment un système orthogonal, tel que

$$\int \chi^*(q, P)\chi(q, P')dq = 0$$

pour $P \neq P'$. Il est alors facile de trouver une fonction $\Psi(P,t)$ telle que

$$\Psi(q, t) = \int \Psi(P, t)\chi(q, P)dP$$

au moyen de laquelle nous pouvons exprimer que

$$\int |\Psi(q, t)|^2 dq = \int |\Psi(P, t)|^2 dP.$$

C'est justement ce qui nous était nécessaire pour calculer la probabilité pour que la particule possède un P compris entre P et $P + dP$.

Considérons quelques exemples :

(1) *Un seul degré de liberté*, $P = p$.

$$\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q}\chi = P\chi, \qquad \chi = e^{i\frac{Pq}{h}}$$

comme auparavant

$$\Psi(q, t) = \int e^{i\frac{Pq}{h}}\Psi(P, t)dP$$

(2) *Moment angulaire*, deux degrés de liberté.

$$P = xp_y - yp_x$$

en coordonnées polaires.

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi = \frac{i}{h}P\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\theta}$$

$$\chi = e^{i\frac{P\theta}{h}}.$$

Mais ici toutes les valeurs de P ne sont pas admissibles car χ doit être une fonction unique et bien définie de x et y. Par conséquent nous devons avoir $P = m\,h$, où m est entier, ce qui nous donne une démonstration directe de la nécessité de la quantification azimutale.

$$\Psi(x, y, t) = \sum_m e^{im\theta}\Psi_m(r, t).$$

Quoique nous puissions toujours former cette expression impliquant la quantification azimutale, elle ne nous est souvent d'aucune utilité. Par exemple si le problème dynamique ne comporte pas une

intégrale des aires, nous ne faisons autre chose que remplacer une équation différentielle en θ par une équation aux différences finies en m. Il est aussi intéressant de noter que même dans le cas où une telle intégrale existe, il peut arriver que la transformation mentionnée ne nous aide en rien. Par exemple, dans un champ magnétique uniforme, les électrons décrivent des cercles et il est parfaitement légitime de quantifier ces cercles. Autant que je sache, personne ne l'a encore fait, pour la raison bien simple que ce serait inutile ; en effet, nos expériences ne séparent jamais les orbites quantifiées individuellement, elles ne concernent que le mouvement de la particule qui fait intervenir la vitesse de groupe et non pas la vitesse des ondes.

(3) *Energie*

$$P = H(q, p) = W$$

donc

$$H\left(q, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q}\right)\chi = W\chi$$

et χ est la solution même de l'équation de SCHRÖDINGER. Nous avons alors

$$\Psi(q, t) = \sum_W \Psi(W, t)\chi_W(q)$$

et nous voyons que

$$\Psi(W, t) = e^{-i\frac{Wt}{h}}$$

résultat banal.

Nous constatons une grande analogie entre la méthode de transformation exposée et le procédé utilisé en dynamique classique pour découvrir les variables canoniques. En dynamique, le choix d'une seule variable canonique fixe en général toutes les autres, ou du moins limite leurs possibilités d'existence. Il en est de même ici. Nous pouvons, par exemple, prendre pour variable canonique soit M_x (moment angulaire autour de l'axe x) soit M_y, mais en aucun cas les deux à la fois. Pour avoir une combinaison renfermant deux moments angulaires, nous devons prendre l'un d'eux égal à $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$. Nous utilisons ensuite l'opérateur de LAPLACE pour poser

$$-h^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\chi = P\chi$$

et nous remplaçons P par ses valeurs caractéristiques $l\,(l + 1)\,h^2$.

La manière dont Dirac attaque le problème le conduit à traiter l'équation de Schrödinger sur le même plan que n'importe quelle équation en χ. C'est là un des traits caractéristiques les plus attrayants de la méthode de Dirac, qu'on ne retrouve plus dans l'exposé que j'ai donné ; en effet j'ai justement basé mon procédé sur l'équation de Schrödinger au lieu de partir directement des principes de l'algèbre non commutative.

Je ne sais s'il est plus avantageux de rechercher une plus grande symétrie par l'emploi de la méthode de Dirac, ou de considérer que certaines variables dynamiques, l'espace et le temps, sont plus intuitives que les autres et de fonder ainsi la théorie sur une base plutôt dissymétrique, comme je l'ai fait dans ce qui précède.



Je me propose d'examiner maintenant, sur quelques exemples, un certain nombre de difficultés qui semblent se présenter dans l'étude du conflit ondes-particules.

L'exposé général qui précède nous a montré comment nous devons aborder le problème suivant les idées de la dynamique, puis changer de voie et le traiter au moyen du Ψ et enfin, pour décrire le phénomène résultant, interpréter de nouveau les fonctions d'ondes dans le langage des particules.

Supposons maintenant que nous observions une suite d'événements, par exemple, la trajectoire d'une particule β dans une chambre de Wilson. Nous voyons ici une suite de gouttelettes, dont chacune doit être regardée comme le résultat d'une observation individuelle ; pour parler quelque peu naïvement, l'onde se transforme continuellement en particule et *vice-versa*. Mais si par hasard nous interceptons une partie du champ de vision, nous ne pouvons plus faire d'observation dans cette partie ; ici l'onde reste telle qu'elle était et nous ne la transformons plus en particule. Nous cherchons à comprendre comment il sera possible d'obtenir les mêmes résultats avec ces deux interprétations différentes.

Pour mieux mettre en lumière la difficulté, je vais préciser l'exemple choisi. Prenons une source de radium émettant des rayons β, qui traversent des fentes, des champs électriques et magnétiques, des cristaux qui les diffractent, etc. (fig. 2). Plaçons trois chambres de Wilson,

peu absorbantes de façon à ne pas arrêter les particules, en trois endroits déterminés, en sorte que tous les rayons β que l'on voit dans la deuxième et la troisième chambre aient déjà traversé la première ; l'expérience consistera à compter le nombre des particules dans chacune de ces chambres. Supposons que s'il y en a 10 dans la première chambre, il y en ait 5 dans la deuxième et 3 dans la dernière. Si maintenant nous couvrons la première de façon à ne plus la voir, nous trouvons toujours 5/3 comme rapport des particules dans les deux autres chambres, mais dans ce cas nous devrons

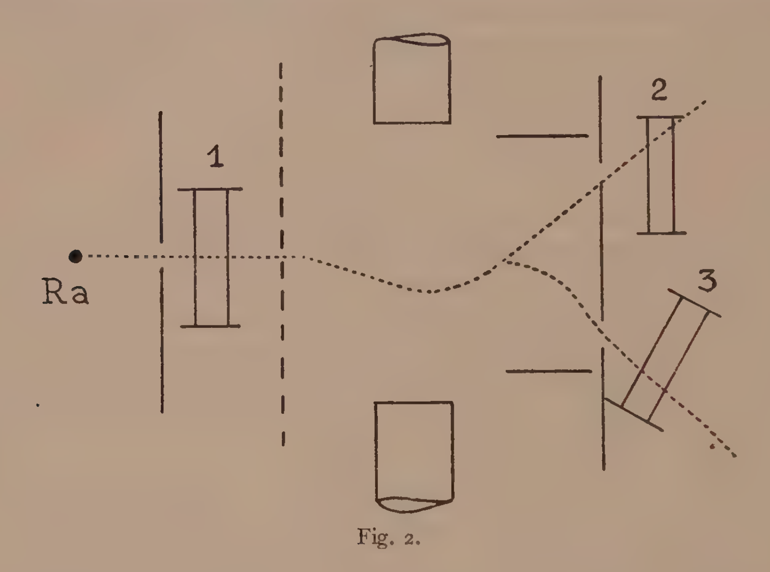


Fig. 2.

être en mesure de prendre le Ψ correct pour la première chambre sans l'interpréter, c'est-à-dire sans passer au langage des particules.

Notez que pour arriver à cela nous devons en tout cas tenir compte de la petite absorption qui a lieu dans la première chambre. On peut le faire en considérant comme système vibrant non seulement la particule β mais aussi les atomes qu'éventuellement elle pourrait ioniser ; de cette façon le système redevient conservatif et nous pouvons plus tard prendre la moyenne pour toutes les ionisations possibles en calculant les probabilités $|\Psi_2|^2 : |\Psi_3|^2$ des observations dans la deuxième et troisième chambre.

La résolution directe de ce problème ne serait pas facile ; je vais

examiner cependant un problème simplifié [1], du même type, relatif à une « expérience à résultats inobservés » et montrer comment l'équation des ondes nous conduira à des résultats qui, si l'on se fiait seulement à notre intuition, ne pourraient s'obtenir qu'à partir de la conception corpusculaire.

Nous décrirons d'abord notre expérience dans le langage des particules, ensuite nous l'envisagerons au point de vue ondulatoire et nous verrons que l'intuition suggère que les résultats doivent être tout à fait différents dans les deux cas. Enfin nous montrerons le caractère fallacieux de cette argumentation et nous prouverons que la théorie ondulatoire possède toutes les qualités requises pour pouvoir décrire complètement les résultats de l'expérience.

Considérons le choc d'une particule de masse M, avec une autre de masse m initialement au repos ; après le choc les deux particules se meuvent de telle façon que si l'on se donne la direction de l'une d'entre elles, la direction de l'autre, ainsi que leurs vitesses respectives sont complètement déterminées par les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Nous appellerons « couple cohérent » un tel couple de particules, et l'un de nos buts sera d'exprimer cette propriété dans la théorie des ondes. La cohérence peut être vérifiée expérimentalement par deux observateurs convenablement placés qui signaleront, toujours simultanément, l'apparition sur des écrans de scintillations dues à M et à m.

Modifions ensuite l'expérience de façon à mettre en évidence la propriété de cohérence, sans être obligés de l'observer directement (fig. 3). Plaçons en B, un miroir qui va réfléchir la particule M. Nous aurons alors en C deux flots de particules arrivant suivant les directions AC et BC. Dans le cas ordinaire, les particules m et M passeront par C à des moments quelconques et indépendants les uns des autres : il en sera de même quand m et M seront cohérents. Mais il y a un cas exceptionnel.

Il peut arriver que les directions AC, AB correspondent à un couple cohérent de particules, et aussi que les vitesses soient telles que le temps mis par M pour parcourir le trajet ABC soit le même que celui employé par m pour se déplacer de A en C. Dans ce cas, les particules se rencontreront de nouveau et seront diffusées encore une fois ; si

(1) Ce problème est discuté avec plus de détails dans les *Proc. Roy. Soc. A.*, vol, 124, p. 375, 1929

nous plaçons un écran au delà de C, nous observerons des scintillations en des endroits qui ne seront ni sur le prolongement de AC, ni sur celui de BC. L'expérience que nous envisageons ici est constituée justement par l'observation de ces scintillations.

Appliquons maintenant brutalement la théorie des ondes. L'élément incident M est une onde sinusoïdale et l'élément M après la diffusion par choc, est une autre onde sinusoïdale, de longueur d'onde variable avec la direction de propagation ; de même pour l'onde diffusée correspondant à *m*. La réflexion modifiera la direction de l'onde M, mais n'y apportera aucun autre changement. Les deux ondes

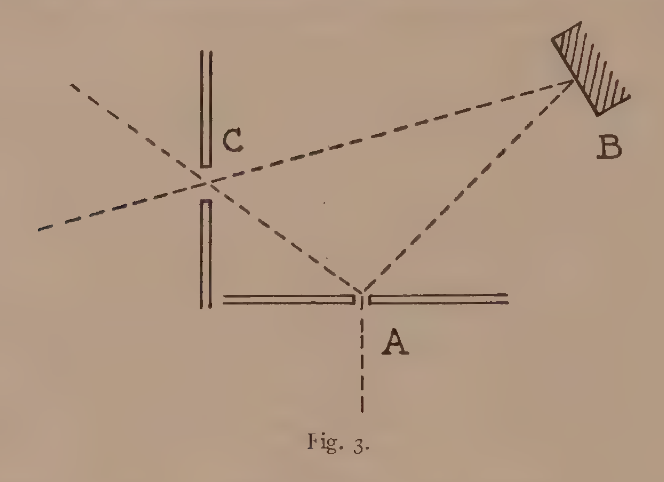


Fig. 3.

se propagent d'une manière continue ; il semble impossible d'exprimer, au moyen de ces ondes continues, la discontinuité qu'on introduit implicitement quand on admet que M et *m* subissent une seconde collision en parcourant leurs trajectoires respectives ABC et AC dans le même intervalle de temps. Comme nous le verrons, cette difficulté est illusoire parce qu'il n'y a pas en fait une onde M et une onde *m* dans l'espace ordinaire, mais *une onde* M plus *m* dans l'espace de configuration à six dimensions.

Résolvons maintenant notre problème. Pour formuler la loi de choc, nous supposerons que les particules ont la même charge électrique *e*. L'équation est alors :

$$(1) \qquad \left(-\frac{h^2}{2M}\Delta_X - \frac{h^2}{2m}\Delta_x + \frac{e^2}{r}\right)\Psi = ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

X et x représentant chacune trois coordonnées et $r = |X - x|$. Résolvons d'abord cette équation suivant le procédé habituel, en cherchant ses fonctions caractéristiques. Ce qui suit est une adaptation d'une des méthodes que GORDON (1) a données pour le problème du passage d'un électron dans le voisinage d'un noyau au repos.

Prenons deux vecteurs vitesse U et u et posons

$$\zeta = r - \frac{(U - u, X - x)}{|U - u|} \tag{2}$$

et

$$\Psi = F(\zeta)\, exp \frac{h}{i} \left\{ M(U, X) + m(u, x) - \frac{1}{2}(MU^2 + mu^2)t \right\} \tag{3}$$

En substituant ceci dans (1) nous voyons que l'équation peut être satisfaite, à condition que F soit une solution de l'équation différentielle ordinaire du type hypergéométrique :

$$\zeta F'' + F' - \frac{i}{h} \frac{|U - u|\, Mm}{M + m} \zeta F' - \frac{e^2}{h^2} \frac{Mm}{M + m} F = 0.$$

La solution finie à l'origine s'exprime au moyen de deux séries asymptotiques

$$F_1(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{b}\right)^{i\beta} + \cdots$$

$$F_2(\zeta) = e^{i\frac{\zeta}{b}} \left(\frac{\zeta}{b}\right)^{-1-i\beta} + \cdots$$

où

$$b = \frac{h(M + m)}{Mm\,|U - u|} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{e^2}{h\,|U - u|}.$$

La solution finie à l'origine est alors

$$F_1 + i\beta \frac{\Gamma(i\beta)}{\Gamma(-i\beta)} F_2.$$

Nous allons éliminer, dès le début un certain nombre de facteurs de proportionnalité et de facteurs de phase donnés par la puissance complexe $\zeta^{i\beta}$ et, au lieu de dire que la solution convenable est une somme de termes F_1 et F_2, nous dirons que l'onde incidente

$$\Psi_{\text{inc}} = exp \frac{i}{h} \left\{ M(U, X) + m(u, x) - \frac{1}{2}(MU^2 + mu^2)t \right\}$$

(1) *Z. f. Physik*, vol. 48, p. 180, 1928.

donne une onde diffusée proportionnelle à

$$\Psi_{\text{dif}} = \Psi_{\text{inc}} \frac{1}{\zeta} \cdot e^{i\frac{\zeta}{h}}$$

$$= exp \frac{i}{h(M+m)} \left\{ rMm \,|U-u| + (MX+mx, MU+mu) \right\} \frac{1}{\left\{ r - \frac{(X-x, U-u)}{|U-u|} \right\}}$$

Cette expression est valable partout sauf dans la direction de propagation où .

$$X_1 = x_1, \qquad X_2 = x_2, \qquad X_3 > x_3.$$

Nous devons maintenant adapter cette solution générale à notre problème particulier. Dans la théorie ondulatoire la notion de particule au repos n'existe pas ; en effet les relations d'indétermination montrent qu'une particule située en un point donné ne peut pas avoir une vitesse bien déterminée. Nous pouvons représenter l'état initial de m par

$$\Psi_m = exp - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} ;$$

l'étalement dû à l'indétermination initiale se fera avec une vitesse représentée par une longueur d'onde de l'ordre de σ. La simplification que nous avons faite pour F_2 est équivalente à la supposition que l'indétermination de la vitesse est beaucoup plus petite que V, vitesse de l'onde incidente M.

La valeur de Ψ_m aux instants ultérieurs sera

$$\Psi_m = \int exp \left\{ \frac{i}{h}(m(ux) - \frac{1}{2} mu^2 t) - \frac{1}{2} \frac{m^2\sigma^2}{h^2}(u^2) \right\} du.$$

m étant maintenant confiné dans le voisinage de A, nous pouvons prendre comme expression de l'onde M :

$$\Psi_M = exp \frac{i}{h}(MVX_3 - \frac{1}{2} MV^2 t)$$

et par conséquent

$$\Psi_{\text{inc}} = \int exp \left[\frac{i}{h} \left\{ m(ux) + MVX_3 - \frac{1}{2}(mu^2 + MV^2)t \right\} - \frac{1}{2} \frac{m^2\sigma^2}{h^2} u^2 \right] du.$$

Nous pouvons alors écrire aisément l'expression de l'onde diffusée. Il faut remarquer qu'approximativement $(U - u) = V$ au dénomina-

teur, mais qu'on doit cependant le prendre égal à V — u_3 dans le terme exponentiel. Dans ce cas

$$\Psi_{\text{dif}} = \int exp\left[\frac{i}{h(M+m)}\left\{rMm(V-u_3) + (MX+mx, MV+mu)\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{m^2\sigma^2u^2}{h^2} - \frac{i}{h}(mu^2 + MV^2)t\right]\frac{du}{r - X_3 + x_3}$$

et en négligeant les facteurs qui ne sont pas essentiels, on a

$$exp - \left[\frac{1}{2\sigma'^2}\left\{\left(\frac{MX_1 + mx_1}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{MX_2 + mx_2}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{MX_3 + mx_3 - Mr}{M+m}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{iMm}{h(M+m)}\left\{MX_3 + mx_3 + mr - \frac{1}{2}(M+m)Vt\right\}\right]\frac{1}{r - X_3 + x_3}$$

où

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + \frac{iht}{m}$$

comme auparavant.

On obtient l'intensité en multipliant par l'expression imaginaire conjuguée ; on a :

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{(r - X_3 + x_3)^2}\, exp - \frac{1}{\sigma_1^2}\left[\left(\frac{MX_1 + mx_1}{M+m}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{MX_2 + mx_2}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{MX_3 + mx_3 - Mr}{M+m}\right)^2\right]$$

où

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 + \left(\frac{ht}{M\sigma}\right)^2$$

comme dans notre première leçon.

Ceci montre que pratiquement nous sommes certains d'obtenir des scintillations simultanées aux points définis par

$$MX_1 + mx_1 = 0$$
$$MX_2 + mx_2 = 0$$
$$MX_3 + mx_3 = Mr$$

ou dans le voisinage immédiat de ces points.

Il est facile de prouver que ces équations sont les conséquences des principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. La manière la plus rapide d'arriver à ce résultat consiste à ajouter une quatrième équation $r = Vt$; on reconnaît alors que les quatre équations expriment la conservation non seulement de la quantité de mouve-

ment mais aussi de l'énergie, cette dernière condition exigeant que les particules se rapprochent et s'éloignent avec la même vitesse relative.

Nous avons vu comment la théorie ondulatoire fournit des résultats exacts dans le cas où nous pouvons observer directement le choc. Nous devons maintenant introduire le miroir réfléchissant et analyser la deuxième diffusion en C. Il est inutile de discuter cela en détail. Nous devons remplacer

$$\Psi(Xx) \quad \text{par} \quad \Psi(Xx) - \Psi(X'x) - \Psi(Xx') + \Psi(X'x')$$

(X' étant le point image de X, etc.), de façon que Ψ s'annule à la surface du miroir pour les deux coordonnées. Le terme $\Psi(X'x)$ représente la partie de l'onde correspondant à la particule M après réflexion, c'est-à-dire à la situation avec M sur BC et m sur AC. Il est inutile de calculer en détail l'effet du deuxième choc ; il nous suffira de reconnaître qu'il a lieu effectivement. Pour cela considérons $\Psi(X'x)$ comme une nouvelle onde incidente et cherchons les régions pour lesquelles Ψ a une valeur appréciable et pour lesquelles on a en même temps $X = x$; dans ces régions en effet le terme $\frac{e^2}{r}\Psi$ devient important, ce qui décèle l'existence d'un second choc. Les régions considérées se trouvent dans le voisinage des points définis par

$$\begin{aligned} MX_1' + mx_1 &= 0 \qquad & X_1 &= x_1 \\ MX_2' + mx_2 &= 0 \qquad & X_2 &= x_2 \\ MX_3' + mx_3 &= Mr' \qquad & X_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Pour prouver que ces régions sont justement celles qui résulteraient de la théorie corpusculaire, il nous suffira d'ajouter aux précédentes l'équation $r' = Vt$; il est évident alors que les 7 équations sont les mêmes que celles qui sont fournies par la théorie des particules. Nous voyons donc que dans notre « expérience non directement observée », la méthode ondulatoire donne précisément les résultats dont nous aurions dit, il y a quelques années, qu'ils prouvaient indubitablement l'existence des particules et condamnaient la conception des ondes.

Le problème que nous avons traité est banal parce que sa solution ne faisait aucun doute. Mais le même problème ne paraît plus banal du tout si nous le posons dans les mêmes termes pour l'effet Compton, où la solution devrait cependant être la même ; c'est même une question très intéressante de voir si des méthodes analogues à celles que

nous avons employées peuvent être utilisées dans ce cas, et de quelle manière.

La méthode de SCHRÖDINGER développée par KLEIN (1) pour son application à l'effet COMPTON est absolument incapable de mettre en évidence le deuxième choc, ou même seulement la cohérence ; la seule méthode dont nous disposons actuellement est celle de DIRAC, qui constitue une discussion complète du problème, mais d'un caractère tout à fait différent et qui entraîne des difficultés d'un autre ordre. Je ne saurais dire si l'on peut résoudre cette question au moyen des procédés que j'ai indiqués ; mais dans l'affirmative je crois que cela pourrait permettre de présenter la théorie du rayonnement sous une forme nouvelle et, je l'espère, plus simple.

Mais, — à moins que cela soit possible, — nous sommes conduits actuellement à constater un fait curieux : pour les problèmes concernant les particules (ou ce que nous pensions être des particules) nous devons employer les méthodes de la théorie des ondes, tandis que pour la lumière, qui nous semble avoir un caractère ondulatoire indéniable, nous sommes obligés d'utiliser la théorie des particules.

En nous aidant de l'exemple exposé plus haut, nous sommes plus ou moins en mesure de voir comment il faut expliquer la formation des trajectoires dans la chambre de WILSON. L'onde émergente (l'onde β) est une onde sphérique, comme nous l'avons déjà vu. Mais si nous voulons trouver la solution sans observer la première partie de la trajectoire, nous ne devons pas simplement considérer cette onde comme sphérique ; nous devons envisager l'ensemble de l'onde dans un espace pluri-dimensionnel tel que l'onde possèderait le caractère sphérique uniquement dans un sous-espace à trois dimensions.

Si l'on juge d'après le cas d'un choc unique, nous devons supposer qu'après les rencontres avec les premiers atomes, il s'introduira dans l'expression de l'onde un facteur de phase de la forme

$$aX + bx + cx' + dx'' + \cdots + lr + mr' + mr''.$$

Sans entrer dans les détails, nous pouvons facilement nous imaginer que cette phase présente quelque particularité, — celle de s'annuler par exemple — quand X, x', x'' sont colinéaires. C'est ainsi que nous arriverons à comprendre comment la fonction d'onde peut expri-

(1) *Z. f. Physik*, vol. 52, p. 853, 1928.

mer la notion de ligne droite dans l'espace ordinaire. En fait cette fonction d'onde ne précise pas quelle est cette droite dans l'espace mais fournit simultanément toutes les droites possibles ; le choix n'est fait qu'au moment de l'observation. Cette observation elle-même sera décrite d'une façon exacte au moyen de notre fonction Ψ ; mais si nous le désirons, nous pouvons revenir en arrière et en tirer des conclusions sur la première partie de la trajectoire qui n'a cependant pas été observée ; nous pouvons faire ce retour en arrière, exactement comme nous aurions pu induire des renseignements sur le premier choc des particules m et M, à partir d'une observation concernant le deuxième.

Il est intéressant de poursuivre plus loin cette idée.

Quand l'observation directe des résultats d'une expérience nous manque, nous pouvons toujours tenir compte de la perturbation qu'elle a introduite dans notre système en y incorporant aussi les appareils d'observation. Nous différons l'interprétation de notre expérience, en agrandissant le système considéré. Quand HEISENBERG utilise son microscope pour observer un électron, il trouble le mouvement de celui-ci ; cependant nous pouvons toujours prédire le mouvement ultérieur, — avec le degré d'incertitude correspondant, — en enfermant ensemble microscope et électron dans une enceinte et en n'indiquant pas les résultats de l'observation. Jusqu'à quel point pouvons-nous aller dans cette voie ?

Considérons l'exemple suivant. Pour nous rendre compte de la présence d'une particule α nous observons dans certains cas la scintillation qu'elle produit. Mais nous pourrions prendre comme résultat de l'observation, non pas cette scintillation elle-même, mais l'émission du photoélectron produite sur la rétine par la lumière émise ; nous pourrions encore prendre à sa place l'effet produit sur le nerf optique, mais il y a un point où nous devrions absolument nous arrêter : c'est la transition du cerveau à l'esprit.

Nous pouvons ainsi imaginer un monde caractérisé par un certain Ψ, un monde inanimé, dans lequel il ne se passe jamais rien, mais qui contient en puissance tout ce qui pourrait advenir. Il ne nous indique ni l'endroit ni le moment où une scintillation apparaît, ni quelle est la partie de la rétine qui l'enregistre. Mais notre esprit possède une catégorie de connaissances tout à fait différentes des précédentes, pour lui les événements existent, les probabilités $|\Psi|^2$ sont trans-

formées en réalités ; de là on peut revenir en arrière et se rendre compte de tous les événements antérieurs. C'est là une conception possible de l'univers ; mais le Ψ qui lui est associé est si incroyablement compliqué qu'il me serait pénible d'admettre une telle conception de l'univers comme celle qui convient pratiquement le mieux.

Je pense qu'il est néanmoins utile de voir comment les propriétés corpusculaires les plus caractéristiques peuvent être expliquées par les méthodes de la théorie ondulatoire si le processus d'explication est finalement éclairé par une donnée de tout autre catégorie, l'observation .

(Traduit par Al. Proca et G. Fournier).

La théorie du rayonnement

PAR

E. FERMI

La liaison entre la théorie quantique et la théorie ondulatoire de la lumière, qui a semblé longtemps impossible, a été récemment établie, surtout grâce à un travail de DIRAC dans lequel celui-ci examine les relations entre un électron capable d'absorber ou d'émettre de la lumière, et le rayonnement lumineux.

Le point de départ du travail de DIRAC est assez simple : au lieu de considérer l'atome et la radiation comme deux systèmes, il les considère comme un système unique dont l'énergie est la somme de l'énergie de l'atome, de l'énergie du champ et d'un troisième terme petit vis-à-vis des deux autres et représentant l'énergie due au couplage de l'atome et du champ électromagnétique. Si on négligeait ce dernier terme cela reviendrait à supposer l'atome et le champ complètement indépendants : il ne pourrait y avoir d'échange d'énergie entre les deux ; c'est la présence de ce terme qui permet aux échanges d'énergie de s'effectuer.

Prenons une comparaison mécanique simple : un pendule M oscillant librement représentera notre atome. Une corde AB pouvant effectuer des oscillations transversales représentera la radiation électromagnétique.

Si le pendule et la corde sont isolés, leurs oscillations ne pourront naturellement pas réagir. Relions maintenant le pendule M à un point de la corde par un fil très élastique et très léger ; ce fil va évidemment

au début changer très peu les mouvements du pendule et de la corde mais pourra à la longue produire des changements importants. Supposons qu'à l'instant initial la corde oscille, le pendule étant immobile; par l'intermédiaire du fil le pendule va recevoir de petites impulsions dont les périodes sont les périodes propres de la corde. Si aucune des périodes propres de la corde n'est égale (ou très voisine) à la période propre du pendule, l'amplitude de l'oscillation du pendule restera toujours petite; si au contraire une période propre de la corde se trouve égale à celle du pendule, celui-ci finira par prendre une oscillation de grande amplitude ; c'est ce qui correspond à l'absorption de la radiation par l'atome.

On verrait de même le cas d'émission de radiation par l'atome : la corde est d'abord immobile et le pendule oscille ; après quelque temps les harmoniques de la corde, dont les fréquences sont très voisines de celle du pendule oscillant, se trouvent amplifiées.

Revenons maintenant à l'étude de l'atome et du champ de radiations et cherchons quelles sont les coordonnées définissant l'état du système. Si l'atome contient un seul électron, il sera défini par ses coordonnées cartésiennes x, y, z, ou bien par le vecteur q dont x, y, z sont les composantes. Le champ électromagnétique pourrait être défini par les valeurs du potentiel scalaire et du potentiel vecteur en chaque point de l'espace, mais cette représentation a divers inconvénients et nous aurons recours à une autre représentation beaucoup plus commode. Nous allons considérer le champ situé dans une portion de l'espace de volume Ω et limitée par des parois parfaitement réfléchissantes. Nous ferons finalement grandir indéfiniment le volume Ω de façon à obtenir à la limite la radiation remplissant tout l'espace.

La radiation électromagnétique remplissant un espace de volume fini peut s'analyser grâce à un développement en série de FOURIER par rapport à ses harmoniques propres.

Pour revenir à l'exemple de la corde de longueur a, l'ordonnée y d'un point M peut s'exprimer par

$$y = \sum_n a_n \sin 2\pi \frac{n}{a} x$$

et la position de la corde à un instant quelconque est définie ainsi par l'expression des a_n en fonction du temps ; remarquons que pour des oscillations libres de la corde les a_n sont des fonctions sinusoïdales

du temps. De même le potentiel vecteur U, en un point M de la radiation pourra se décomposer en une série de FOURIER $U = \Sigma u_s$, avec

(1) $$U_s = A_s u_s(t) \sin \left[\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right]$$

ou $\alpha_s q$ représente le produit scalaire des vecteurs α_s et q ; q est un vecteur de composantes x, y, z, coordonnées du point M ; α_s est un vecteur unitaire donnant la direction de l'onde stationnaire considérée ; β_s représente une phase. A_s est un vecteur unitaire qui donne la direction de U_s ; dans le cas des ondes transversales A_s est perpendiculaire à α_s.

Enfin U_s est un facteur fonction du temps seulement, définissant la grandeur du potentiel vecteur aux ventres de l'onde stationnaire (en ces points en effet le facteur sinus a pour valeur un). Nous prendrons les u_s comme coordonnées définissant la radiation électromagnétique. Dans le cas des vibrations libres du champ les u_s sont des fonctions sinusoïdales du temps

$$u_s = K_s \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\pi\nu_s t.$$

En résumé le potentiel vecteur U en un point défini par q est donné par

(2) $$U = \sum_s A_s u_s \sin\left(\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right)$$

la somme devant être étendue à toutes les oscillations propres du domaine considéré. Ces oscillations sont en nombre infini, mais dénombrables tant que Ω reste fini. Quand Ω grandit indéfiniment les valeurs ν_s tendent vers une suite continue et à la limite le nombre dN d'oscillations propres dont les fréquences sont comprises entre ν et $\nu + d\nu$ est donné par

(3) $$dN = \frac{8\pi}{c^3}\Omega\nu^2 d\nu.$$

Cette expression nous servira plus tard.

Calculons la valeur de l'énergie électromagnétique du champ défini par son potentiel vecteur (2).

Les formules classiques

$$H = \text{rot } U \qquad E = -\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t}$$

nous donnent pour les champs magnétique et électrique

$$(4)\qquad \begin{cases} H = \sum_s \frac{2\pi\nu_s}{c}[\alpha_s \times A_s] u_s \cos\left[\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right] \\ E = -\frac{1}{c}\sum_s A_s \dot{u}_s \sin\left[\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q + \beta_s\right] \end{cases}$$

où $[\alpha_s \times A_s]$ représente le produit vectoriel des vecteurs α_s et A_s.

L'énergie électromagnétique étendue à tout l'espace Ω sera

$$W_e = \Omega \frac{\overline{E^2} + \overline{H^2}}{8\pi}$$

les quantités surlignées désignant des valeurs moyennes.

En calculant E^2 et H^2 qui sont des sommes par rapport à s on obtient des termes carrés, et des termes rectangles dont la moyenne est nulle. En tenant compte de ce que $\overline{\sin^2}$ et $\overline{\cos^2}$ ont pour valeur $\frac{1}{2}$ et en se souvenant que les vecteurs α_s et A_s sont orthogonaux (ondes transversales) on obtient

$$\overline{H^2} = \sum_s \frac{2\pi^2\nu_s^2}{c^2} u_s^2 \qquad \text{et} \qquad \overline{E^2} = \frac{1}{2c^2}\sum_s \dot{u}_s^2$$

d'où l'énergie électromagnétique

$$(5)\qquad W_e = \frac{\Omega}{8\pi c^2}\sum_s\left(\frac{1}{2}\dot{u}_s^2 + 2\pi^2\nu_s^2 u_s^2\right).$$

Nous pourrons donner à cette expression la forme Hamiltonienne en considérant la variable v_s conjuguée de u_s

$$v_s = \frac{\partial W_e}{\partial \dot{u}_s} = \frac{\Omega}{8\pi c^2}\dot{u}_s$$

W_e s'écrira alors

$$(6)\qquad W_e = \sum_s \left[\frac{8\pi c^2}{\Omega}\frac{v_s^2}{2} + \frac{\Omega}{8\pi c^2} 2\pi^2\nu_s^2 u_s^2\right].$$

En écrivant les équations canoniques

$$\dot{u}_s = \frac{\partial W_e}{\partial v_s}\,; \qquad \dot{v}_s = -\frac{\partial W_e}{\partial u_s}$$

nous devons obtenir l'équation des vibrations libres de l'espace Ω.

En effectuant on trouve bien

$$\ddot{u}_s + 4\pi^2\nu_s^2 u_s = 0$$

qui donne pour u_s une fonction périodique de fréquence ν_s. Dans l'équation (6) remplaçons les variables canoniques u_s et v_s par deux nouvelles variables canoniques q_s et p_s définies par

$$(7) \qquad u_s = \sqrt{\frac{8\pi c^2}{\Omega}}\, q_s\,; \qquad v_s = \sqrt{\frac{\Omega}{8\pi c^2}}\, p_s.$$

L'équation (6) deviendra alors

$$(8) \qquad W_e = \sum_s \left[\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right]$$

Hamiltonien identique à celui d'oscillateurs (définis par l'indice s) indépendants, de masses 1 et de fréquences ν_s.

Avec ces nouvelles variables l'expression (2) du potentiel vecteur deviendra

$$(9) \qquad U = \sqrt{\frac{8\pi c^2}{\Omega}} \sum_s A_s q_s \sin\left(\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right).$$

Il nous reste à calculer l'Hamiltonien de l'atome situé dans le champ au point défini par q.

Cet Hamiltonien W_a est donné par la relation relativiste

$$(10) \qquad 0 = -\frac{1}{2m}\left\{\left(mc + \frac{W_a - eV}{c}\right)^2 - \left(p - \frac{eU}{c}\right)^2\right\} + \frac{mc^2}{2}.$$

Nous négligerons dans son développement les termes en $\frac{1}{c^2}$: ils représentent des corrections relativistes que nous voulons négliger, l'Hamiltonien déjà écrit devrait sans quoi être aussi affecté de corrections dans le sens donné par la théorie de l'électron tournant de DIRAC.

La relation (10) ainsi développée donne

$$(11) \qquad W_a = \frac{p^2}{2m} + eV - \frac{e}{mc}(U \cdot p).$$

L'Hamiltonien complet de l'atome et du champ réagissant l'un sur l'autre s'obtiendra en ajoutant à l'expression (8) (Hamiltonien du champ) l'expression (11) dans laquelle U est remplacé par son expression (9) On obtient ainsi l'Hamiltonien

$$(12) \qquad H = \frac{p^2}{2m} + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p_s^2 + 2\pi^2 \nu_s^2 q_s^2\right)$$
$$- \frac{e}{m}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s (A_s \cdot p) q_s \sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right\}.$$

Les deux premiers termes représentent l'Hamiltonien de l'atome seul, le troisième terme l'Hamiltonien de la radiation seule (ou sans interaction de l'atome et du champ). Le dernier terme qui est petit représente précisément l'interaction de l'atome et du champ. Dans certaines applications, comme la théorie de la dispersion ou de l'effet COMPTON, l'approximation qui nous a permis de passer de (10) à (11) n'est plus légitime : dans le développement de $\left(p - \frac{eU}{c}\right)^2$ il faut alors conserver le terme $\frac{e^2U^2}{c^2}$ dans lequel U est remplacé par son expression (9). Cela nous conduit donc à ajouter à l'Hamiltonien (12) H, le terme

$$(13) \qquad H_2 = \frac{4\pi e^2}{m\Omega} \sum_{s,\,\sigma} (A_s \cdot A_\sigma) q_s q_\sigma \sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}\alpha_s \cdot q + \beta_s\right\} \sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}\alpha_\sigma \cdot q + \beta_\sigma\right\}$$

Mais en général il est inutile de tenir compte de H_2.

Il est important de remarquer que la théorie classique de la radiation électromagnétique peut se déduire de l'Hamiltonien (12) : Ecrivons en effet les équations canoniques

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

elles donnent

$$\dot{q}_s = p_s \quad \text{et} \quad \dot{p}_s = -4\pi^2\nu_s^2 q_s + \frac{e}{m}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}(A_s \cdot p) \sin\left\{\frac{2\nu\pi_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right\}$$

ou en chassant p_s

$$(14) \qquad \ddot{q}_s + 4\pi^2\nu_s^2 q_s = \frac{e}{m}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}(A_s \cdot p) \sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q)\ \beta_s\right\}$$

qui représente les oscillations forcées d'un oscillateur de fréquence ν_s. En particulier quand $p = o$, c'est-à-dire quand l'électron de l'atome considéré est immobile, l'équation (14) se réduit bien à une oscillation libre.

Pour déduire de (14) la formule de LARMOR classique donnant l'énergie rayonnée par l'atome, nous ferons les trois hypothèses suivantes :

1° Que l'électron reste voisin de l'origine des coordonnées : $q \cong o$ de façon qu'on puisse remplacer $\sin\left[\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right]$ par $\sin \beta_s$. Cette hypothèse, également nécessaire pour la démonstration classique, revient à dire que les dimensions de l'atome sont petites vis-à-vis

de la longueur d'onde de la radiation émise, et elle est dans le plus grand nombre de cas largement satisfaite.

2° Qu'à l'instant initial il n'y a pas de radiation : $q_s(o) = \dot{q}_s(o) = 0$

3° Enfin nous supposerons que le mouvement de l'électron émissif peut s'écrire en série de FOURIER de sorte que sa quantité de mouvement p s'écrira

$$p = mv = m \sum_a v_a \sin (2\pi\nu_a t + \beta_a).$$

On voit alors facilement que les énergies rayonnées par les diverses composantes a sont indépendantes ; pour calculer celle correspondant à la $a^{\text{ième}}$ il nous suffit de poser $p = m\, v_a \sin (2\pi\nu_a t + \beta_a)$.

L'équation (14) peut alors s'écrire en tenant compte de l'hypothèse 1°

$$(15) \qquad \ddot{q}_s + 4\pi^2\nu^2{}_s q_s = c\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}(A_s \cdot v_a) \sin \beta_s \cdot \sin (2\pi\nu_a t + \beta_a).$$

Son intégrale générale est

$$(16) \quad q_s = F \sin 2\pi\nu_s t + G \cos 2\pi\nu_s t + e\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu^2{}_s - \nu^2{}_a)} \sin (2\pi\nu_a t + \beta_a).$$

L'hypothèse 2° relative aux conditions initiales définit les constantes F et G ; on trouve

$$(17) \quad \begin{cases} F = -\dfrac{\nu_a}{\nu_s} e\sqrt{\dfrac{8\pi}{\Omega}} \dfrac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu^2{}_s - \nu^2{}_a)} \cos \beta_a ; \\ G = - e\sqrt{\dfrac{8\pi}{\Omega}} \dfrac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu^2{}_s - \nu^2{}_a)} \sin \beta_a . \end{cases}$$

Ces expressions montrent que q_s ne prend une valeur importante que pour les fréquences ν_s voisines de ν_a.

L'énergie accumulée dans la $s^{\text{ième}}$ composante de la radiation est donnée par (8)

$$w_s = \frac{1}{2} p^2{}_s + 2\pi^2\nu^2{}_s q^2{}_s$$

qu'on peut écrire avec une approximation suffisante

$$(18) \qquad w_s = 4\pi^2\nu^2{}_s \overline{q^2{}_s}$$

car dans un oscillateur harmonique on a

$$\frac{1}{2}\overline{p^2{}_s} = 2\pi^2\nu^2{}_s \overline{q^2{}_s}.$$

L'intégrale générale (16), compte tenu des conditions (17) et du fait que ν_s est assez voisin de ν_a, pour pouvoir écrire

$$\frac{\nu_a}{\nu_s} = 1 \qquad \text{et} \qquad \nu^2_s - \nu^2_a = 2\nu_a(\nu_s - \nu_a),$$

s'écrit

$$(19) \quad \begin{cases} q_s = e\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{4\pi^2(\nu^2_s - \nu^2_a)} \left\{ \sin(2\pi\nu_a t + \beta_a) - \sin(2\pi\nu_s t + \beta_a) \right\} \\ \text{ou} \\ q_s = -2e\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \frac{(A_s \cdot V_a) \sin \beta_s}{8\pi^2\nu_a} \cos(\pi(\nu_s + \nu_a)t + \beta_a) \frac{\sin \pi(\nu_s - \nu_a)t}{\nu_s - \nu_a}. \end{cases}$$

Dans cette expression le seul terme variant rapidement avec le temps est $\cos[\pi(\nu_s + \nu_a)t + \beta_a]$ et dans (18) nous ne devrons prendre la moyenne que par rapport à ce terme. L'expression (18) devient alors, en tenant toujours compte que $\nu_a \neq \nu_s$:

$$(20) \qquad W_s = \frac{e^2}{\pi\Omega}(A_s \cdot V_a)^2 \sin^2 \beta_s \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2}.$$

C'est l'énergie transmise par la radiation ν_a à la radiation ν_s. L'énergie totale fournie est la somme par rapport à s des énergies w_s. Or, le nombre de fréquences propres contenues dans l'intervalle $d\nu_s$ est donné par

$$dN = \frac{8\pi}{c^3}\Omega\nu^2_s d\nu_s.$$

Ces composantes vibrent avec des directions (définies par A_s) et des phases β_s uniformément réparties, c'est-à-dire que

$$\overline{A^2_{sx}} = \frac{1}{3}, \quad \overline{A^2_{sy}} = \frac{1}{3}, \quad \overline{A^2_{sz}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{A_{sx}A_{sy}} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\sin^2 p_s} = \frac{1}{2}.$$

L'énergie fournie aux radiations de fréquences comprises entre ν_s et $\nu_s + d\nu_s$ sera donc

$$dW = \frac{8\pi}{c^3}\Omega\nu^2_s d\nu_s \frac{c^2}{\pi\Omega} \cdot \frac{v^2_a}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin^2\pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2}.$$

En tenant toujours compte du fait que $\nu_a \neq \nu_s$ on peut écrire

$$(21) \qquad dW = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\nu^2_a v^2_a \frac{\sin^2\pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2} d\nu_s.$$

L'énergie totale émise par la radiation ν_a s'obtient en intégrant

$$W = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\nu^3{}_a v^2{}_a \int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2} d\nu_s.$$

Intégration facile si on se souvient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 qx}{x^2} dx = \pi q$$

et en remarquant que par rapport à la nouvelle variable $\nu_s - \nu_a$ on peut sans erreur sensible prendre l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$.

L'intégrale cherchée a la valeur

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \pi(\nu_s - \nu_a)t}{(\nu_s - \nu_a)^2} d\nu_s = \pi^2 t$$

d'où l'expression finale de W

(22) $$W = \frac{4\pi^2 e^2 \nu^2{}_a v^2{}_a t}{3c^3}.$$

Pour obtenir la formule habituelle de Larmor, calculons l'accélération Γ_a correspondant à la $a^{\text{ième}}$ composante du mouvement de l'atome M_a.

$$\Gamma_a = \frac{d}{dt}[v_a \sin(2\pi\nu_a t + \beta_a)] = 2\pi\nu_a v_a \cos(2\pi\nu_a t + \beta_a)$$

d'où

$$\overline{\Gamma^2_a} = 2\pi^2\nu^2{}_a v^2{}_a.$$

L'équation (22) donne la formule classique de Larmor

(23) $$\frac{W}{t} = \frac{2e^2}{3c^3}\overline{\Gamma^2_a}$$

donnant l'énergie rayonnée par unité de temps.

Nous allons maintenant utiliser l'Hamiltonien (12) non plus avec les méthodes classiques, mais avec celles de la mécanique ondulatoire. Or l'Hamiltonien H peut s'écrire

$$H = H_0 + \mathcal{H}$$

où

(24) $$H_0 = \frac{p^2}{2m} + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2}p^2{}_s + 2\pi^2\nu^2{}_s q^2{}_s\right)$$

représente ce qu'on obtiendrait si on ne tenait pas compte de l'interaction de l'atome et de la radiation, et $\mathcal{H}$ représente le terme complémentaire

$$(25) \qquad \mathcal{H} = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s{}' q_s \sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s\right\} \cdot (A_s \cdot p).$$

On sait que pour déduire de l'Hamiltonien H d'un système quelconque, l'équation de SCHRÖDINGER correspondante, il suffit de considérer

$$H(q_k, p_k)$$

comme un opérateur, l'équation de SCHRÖDINGER étant donnée par

$$(26) \qquad H\left(q_k, -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\Psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

On peut chercher les solutions de (26) de la forme

$$\Psi = u e^{\frac{2\pi i}{h}Et}$$

On trouve que u est alors donné par

$$(27) \qquad H\left(q_k, -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)u(q) = Eu(q).$$

La fonction u ne dépend pas du temps et l'équation n'a de solutions régulières dans tout le champ des variables que pour une suite discrète de valeurs de E, soient

$$E_1 E_2 \cdots E_n \cdots$$

Les solutions correspondantes de (27) forment une suite orthogonale, que nous pouvons normaliser. Soient $u_1, u_2 \ldots, u_k \ldots$ ces solutions ; on a donc

$$\int u_i u_k dq = \delta_{ik} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \delta_{ik} = 1 & \text{si} \quad i = k \\ \delta_{ik} = 0 & \text{si} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Toute combinaison linéaire des solutions

$$\Psi_k = u_k e^{\frac{2\pi i}{h}E_k t}$$

sera évidemment solution de l'équation générale (26).

Nous écrirons donc la solution de (26) sous la forme

$$\Psi = \sum_k{}' a_k u_k e^{\frac{2\pi i}{h}E_k t},$$

les a_k étant des constantes en général complexes.

Si nous voulons imposer à Ψ la condition habituelle

$$\int |\Psi|^2 dq = 1$$

nous devons imposer aux constantes a_k la condition

(28) $$\sum_k{}' |a_k|^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \sum_k{}' a_k \tilde{a}_k = 1$$

le symbole $\tilde{a}_k$ désignant la quantité conjuguée de a_k.

La signification physique des a_k est bien connue (principe de BORN) : le carré du module de a_k représente la probabilité pour qu'un observateur trouve le système dans le $k^{\text{ième}}$ état quantique. Considérons maintenant le système ayant l'Hamiltonien non perturbé

$$H_o = \frac{p^2}{2m} + eV + \sum_s \left(\frac{1}{2} p^2_s + 2\pi^2 \nu^2_s q^2_s\right)$$

H_0 est la somme de l'Hamiltonien de l'électron

(29) $$\frac{p^2}{2m} + eV$$

et des Hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques de masse 1 de fréquences ν_s

(30) $$\frac{1}{2} p^2_s + 2\pi^2 \nu^2_s q^2_s.$$

Soit u_n (n est un entier quelconque) une fonction de SCHRÖDINGER pour l'Hamiltonien (29) et E_k la valeur propre correspondante, soient de même u_{n_1}, u_{n_2},... u_{n_s}... (n_1, n_2,... n_s sont des entiers quelconques) des fonctions de SCHRÖDINGER pour les radiations 1, 2,... s... et E_{n_1}, E_{n_2},... E_{n_s}... les valeurs propres, tout produit

(31) $$u_n u_{n_1} u_{n_2} \cdots u_{n_s} \cdots e^{\frac{2\pi i}{h}[E_n + E_{n_1} + \cdots]t}$$

où n, n_1, n_2,... n_s sont des entiers quelconques, sera solution de l'équation de SCHRÖDINGER, correspondant à l'Hamiltonien H_0.

Les valeurs E_{n_1}... E_{n_s}... correspondant aux oscillateurs harmoniques sont connues :

$$E_{n_s} = h\nu_s\left(n_s + \frac{1}{2}\right).$$

En négligeant les constantes additives $\frac{1}{2}h\nu_s$ indépendantes de l'état quantique n_s le produit (31) peut s'écrire

$$u_n u_{n_1} \cdots u_{n_s} \cdots e^{\frac{2\pi i}{h}[E_n + h\nu_1 n_1 + \cdots + h\nu_s n_s + \cdots]t}.$$

La solution la plus générale de l'équation de SCHRÖDINGER pour l'Hamiltonien non perturbé sera encore une combinaison linéaire à coefficients constants

$$(32)\qquad \sum_{n, n_1, \ldots n_s} a_{n\, n_1 n_2 \cdots n_s \cdots} u_n u_{n_1} \cdots u_{n_s} \cdots e^{\frac{2\pi i}{h}[E_n + h\nu_1 n_1 + \cdots + h\nu_s n_s + \cdots]t}.$$

Nous aurons la condition de normalisation

$$\sum |a_{n\, n_1} \cdots {}_{n_s} \cdots|^2 = 1.$$

La signification physique des a est la suivante : le carré du module de $a_{n\, n_1 \ldots n_s}$ représentera la probabilité pour qu'on trouve l'électron dans l'état quantique n et les radiations 1, 2... s.. dans les états $n_1 n_2 \ldots n_s$.. Si nous supposons par exemple que

$$a_{2138} \cdots = 1$$

tous les autres a étant nuls, cela veut dire que l'atome est dans le deuxième état quantique et que les oscillateurs de radiation 1, 2, 3... sont excités par 1, 3, 8... quanta.

Nous allons maintenant tenir compte de l''interaction entre l'atome et la radiation. L'Hamiltonien du système sera alors $H_0 + \mathcal{H}$ et l'équation de SCHRÖDINGER

$$(H_0 + \mathcal{H})\Psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

qu'on peut écrire

$$(33)\qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - H_0\Psi = \mathcal{H}\Psi.$$

Nous allons chercher à trouver des solutions de la forme (32)

$$(34)\qquad \Psi = \sum a_{n\, n_1} \cdots {}_{n_s} \cdots u_n u_{n_1} \cdots u_{n_s} \cdots e^{\frac{2\pi i}{h}[E_n + h n_1 \nu_1 + \cdots + h n_s \nu_s + \cdots]t}.$$

mais où les a sont alors des fonctions à déterminer du temps. En se

souvenant que l'équation (33) sans second membre serait satisfaite par la forme (34) avec des a constants, on voit que l'équation (33) devient

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{h}{2\pi i}\sum \dot{a}_{nn_1\cdots n_s\cdots} u_n u_{n_1}\cdots u_{n_s}\cdots e^{\frac{2\pi i}{h}[E_n+\cdots+hn_s\nu_s+\cdots]t}\\&=\mathcal{H}\cdot\sum a_{nn_1\cdots} u_n u_{n_1}\cdots e^{\frac{2\pi i}{h}[E_n+\cdots]t}.\end{aligned}\right.$$

Ne pas oublier que dans le second membre $\mathcal{H}$ représente un opérateur. Il n'opérera pas sur les a fonctions du temps seul, ni sur le facteur exponentiel. Nous pourrons donc écrire, en remplaçant les n_s par des m_s sous le signe Σ du second membre pour faciliter les calculs ultérieurs

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{h}{2\pi i}\sum \dot{a}_{nn_1\cdots n_s\cdots} u_n\cdots u_{n_s}\cdots e^{\frac{2\pi i}{h}[E_n+\cdots+hn_s\nu_s+\cdots]t}\\&=\sum a_{mm_1\cdots m_s\cdots}\mathcal{H}(u_n\cdots u_{n_s}\cdots)e^{\frac{2\pi i}{h}E[_n+\cdots+hn_s\nu_s+\cdots]t}.\end{aligned}\right.$$

Pour résoudre multiplions les deux membres de cette égalité par

$$\frac{2\pi i}{h}u_n u_{n_1}\cdots u_{n_s}\cdots e^{-\frac{2\pi i}{h}[E_n+h\nu_1 n_1+\cdots+h\nu_s n_s+\cdots]t}\,dq\,dq_1\cdots dq_s\cdots$$

et intégrons dans tout le champ des variables. Toutes les fonctions u étant normalisées le premier membre donne $a_{n,\ldots n_1,\ldots n_s\ldots}$ Quant au second membre il peut s'écrire

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}&\dot{a}_{nn_1\cdots n_s\cdots}=\frac{2\pi i}{h}\sum_{mm_1\cdots m_s} a_{mm_1\cdots m_s\cdots}\mathcal{H}_{nn_1\cdots n_s\cdots;\,mm_1m_2\cdots m_s\cdots}\\&e^{\frac{2\pi i}{h}[E_m-E_n+h\nu_1(m_1-n_1)+\cdots+h\nu_s(m_s-n_s)\cdots]t}\end{aligned}\right.$$

avec l'égalité

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathcal{H}_{nn_1\cdots n_s\cdots;\,mm_1\cdots m_s\cdots}\\&=\iint\cdots\int u_n u_{n_1}\cdots u_{n_s}\cdots\mathcal{H}(u_m u_{m_1}\cdots u_{m_s}\cdots)\,dq\,dq_1\cdots dq_s\cdots\end{aligned}\right.$$

Dans le second membre on doit remplacer l'opérateur $\mathcal{H}$ par son expression (25), augmentée, si cela devient nécessaire, du terme complémentaire (13).

En ne conservant que le terme (25)

$$\mathcal{H}=-\frac{e}{m}\sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}}\sum_s q_s\sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s\cdot q)+\beta_s\right\}(A_s\cdot p)$$

on voit que le seul opérateur différentiel est $(A_s . p)$ qui portant sur le produit $u_m u_{m_1} \ldots u_{m_2} \ldots$ donne

$$-\frac{h}{2\pi i}(A_s \cdot \operatorname{grad} u_m) u_{m_1} \cdots u_{m_s} \cdots$$

En définitive l'opérateur $\mathcal{H}$ $(u_m u_{m_1} \ldots u_{m_s} \ldots)$ sera

$$(39) \quad \begin{cases} \mathcal{H}(u_{m_1} \cdots u_{m_s} \cdots) = \dfrac{h}{2\pi i} \dfrac{e}{m} \sqrt{\dfrac{8\pi}{\Omega}} \sum_s q_s \\ \sin \left\{ \dfrac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} (A_s \cdot \operatorname{grad} u_m) u_{m_1} u_{m_2} \cdots u_{m_s} \cdots \end{cases}$$

En substituant dans (38) on obtient ainsi une somme de termes. faciles à calculer en remplaçant l'intégrale multiple par le produit des intégrales relatives à chaque paramètre. Calculons le $s^{\text{ième}}$ terme ; c'est un produit d'intégrales. Pour le paramètre q nous avons l'intégrale

$$\int u_n \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} \operatorname{grad} u_m dq.$$

Nous poserons

$$(40) \qquad P_{snm} = -\frac{h}{2\pi i} \int \sin \left\{ \frac{2\pi\nu_s}{c}(\alpha_s \cdot q) + \beta_s \right\} u_n \operatorname{grad} u_m dq.$$

Pour tous les autres paramètres sauf q_s on a les intégrales

$$(41) \qquad \int u_{n\alpha} u_{m\alpha} dq_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m_\alpha \neq n_\alpha \\ 1 & \text{si} \quad m_\alpha = n_\alpha \end{cases}$$

à cause de l'orthogonalité des fonctions u.

Enfin pour le paramètre q_s on a :

$$(42) \qquad \int q_s u_{ns} u_{ms} dq_s = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m_s \neq n_s \pm 1 \\ \sqrt{\dfrac{h}{8\pi^2\nu_s}} \sqrt{n_s + 1} & \text{si} \quad m_s = n_s + 1 \\ \sqrt{\dfrac{h}{8\pi^2\nu_s}} \sqrt{n_s} & \text{si} \quad m_s = n_s - 1. \end{cases}$$

Ces dernières relations peuvent se vérifier facilement car les u sont les fonctions fondamentales d'un oscillateur de masse 1 de fréquence ν_s. On peut aussi remarquer que le premier membre est l'élément $n_s\ m_s$ de la matrice représentant l'abscisse d'un oscillateur harmonique de masse 1 et de fréquence ν_s. On sait que dans une telle matrice les seuls

termes non nuls sont ceux qui entourent la diagonale principale. Ils correspondant à $m_s = n_s \pm 1$ et ont la valeur indiquée dans (42).

On voit ainsi que $\mathcal{H}_{nn_1 \ldots n_s \,;\, mm_1 \ldots m_s \ldots}$ est nul sauf si tous les m_i sont égaux aux n_i sauf un qui doit être tel que $m_s = n_s \pm 1$ et on a alors

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{H}_{n,\, n_1,\, n_2 \cdots n_s \cdots n_N \cdots \,;\, mn_1 n_2 \cdots n_s \pm 1 \,;\, \cdots n_N \cdots} \\ & = -\frac{e}{m}\sqrt{\frac{h}{\Omega\pi\nu_s}} \left\{ \begin{matrix} \sqrt{n_s + 1} \\ \text{ou} \\ \sqrt{n_s} \end{matrix} \right\} (A_s \cdot P_{smn}) \end{aligned} \right.$$

ou l'on doit prendre $\sqrt{n_s+1}$ ou $\sqrt{n_s}$ selon que $m_s = n_s + 1$ ou $m_s = n_s - 1$.

En portant dans (37) nous pouvons déduire $\dot{a}$.

Nous allons pousser les calculs dans le cas particulier important où les dimensions de l'atome sont petites vis à vis de la longueur d'onde de la radiation émise ; dans ces conditions l'expression du vecteur P_{smn} peut être simplifiée. On avait posé

$$(44) \qquad P_{snm} = -\frac{h}{2\pi i} \sin\left\{\frac{2\pi\nu_s}{c}(d_s \cdot q) + \beta_s\right\} u_n \operatorname{grad} u_m dq.$$

Nous écrirons ici avec l'approximation consentie

$$(45) \qquad P_{snm} = -\frac{h}{2\pi i} \sin \beta_s \int u_n \operatorname{grad} u_m dq.$$

Mais on peut démontrer facilement que

$$(46) \qquad -\frac{h}{2\pi i}\int u_n \operatorname{grad} u_m dq = 2\pi\nu_{mn}\int q u_n u_m dq.$$

L'équation (45) donne alors

$$(47) \qquad P_{snm} = 2\pi\nu_{mn} \sin \beta_s Q_{nm}$$

en posant

$$(48) \qquad Q_{nm} = \int q u_n u_m dq$$

Q_{nm} représentant l'élément n, m de la matrice Q donnant le rayon vecteur de l'électron.

Dans ces conditions l'équation (43) devient

$$(49) \quad \mathcal{H}_{n \cdots n_s \cdots ;\, m \cdots n_s \pm 1 \cdots} = -\frac{2\pi i}{m}\sqrt{\frac{h}{\pi\Omega}}\,(A_s \cdot Q_{nm})\frac{\nu_{mn}}{\sqrt{\nu_s}} \sin \beta_s \left\{ \begin{matrix} \sqrt{n_s + 1} \\ \text{ou} \\ \sqrt{n_s} \end{matrix} \right\}$$

En portant dans (37) on a immédiatement

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} \dot a_{m\alpha_1\cdots\alpha_s\cdots} &= \frac{4\pi^{\frac{3}{2}} e}{\sqrt{3h}} \sum_{n\,s} \frac{\nu_{mn}}{\sqrt{\nu_s}} (A_s \cdot Q_{mn}) \\ &\cdot \sin\beta_s \left[\begin{aligned} &- a_{n\alpha_1}\cdots{}_{\alpha_s+1}\cdots\sqrt{\alpha_s+1}\, e^{2\pi i(\nu_{mn}+\nu_s)t} \\ &+ a_{n\alpha_1}\cdots{}_{\alpha_s-1}\cdots\sqrt{\alpha_s}\, e^{2\pi i(\nu_{mn}-\nu_s)t} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation fondamentale : connaissant les valeurs initiales des a on peut en déduire leurs valeurs à un instant quelconque par intégration.

Nous allons indiquer brièvement quelques exemples de phénomènes que l'on peut étudier grâce à cette théorie.

La recherche de la vie moyenne de l'atome dans un état donné, l'état 2 par exemple, s'obtient en cherchant l'expression de $|a_{200\cdots0}|^2$ en fonction du temps.

Si à l'instant initial l'atome est effectivement dans l'état 2

$$a_{2000\cdots0} = 1 \qquad \text{pour} \qquad t = 0,$$

connaissant les valeurs de a pour $t = 0$, nous pouvons déduire des équations (50) la valeur des a pour t quelconque. On trouve ainsi:

$$|a_{200\cdots}|^2 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

qui nous démontre que la probabilité que l'atome soit dans l'état 2 décroît exponentiellement avec le temps : τ est la vie moyenne cherchée.

On peut encore traiter avec la même méthode le problème de la largeur des raies spectrales, c'est-à-dire étudier la répartition des intensités des diverses fréquences ν_s de la radiation, connaissant la fréquence propre ν_{mn} de l'atome.

L'avantage de cette théorie est de traiter indifféremment des problèmes qui se traitent par la théorie oscillatoire de la lumière ou des problèmes qui se traitent par la théorie des quanta de lumière.

Nous pouvons ainsi traiter aussi bien le problème des interférences qui se résout généralement par la théorie oscillatoire, que l'effet Compton qui se traite par la mécanique quantique, ou enfin l'effet Doppler qui occupe une position intermédiaire.

Nous allons prendre tout d'abord une application assez simple :

le cas de deux atomes rayonnants. Soient A, B ces deux atomes et r leur distance, il nous faut trouver l'Hamiltonien du système formé par les deux atomes et la radiation. Nous ne traiterons que le cas où l'interaction directe des deux atomes est négligeable (distance r assez grande).

Dans ces conditions, l'Hamiltonien du système sera la somme des Hamiltoniens des deux atomes, de la radiation et des deux termes qui représentent les interactions des atomes A et B avec la radiation. Nous allons encore considérer les grandeurs

$$a_{n_A n_B n_1 n_2 \cdots n_s \cdots}$$

dont les carrés représentent les probabilités pour que le système soit dans l'état caractérisé par les nombres quantiques n_A, n_B pour les atomes et $n_1 \ldots n_s \ldots$ pour la radiation.

Supposons pour simplifier que les atomes A et B aient seulement deux états quantiques possibles 1 et 2 et qu'à l'instant initial, le seul atome A soit excité, c'est-à-dire

$$a^{(0)}_{2100 \ldots 0 \ldots} = 1,$$

tous les autres a étant nuls à l'instant initial.

Les valeurs ultérieures des a sont données par l'intégration des équations (50). On trouve encore que le terme $a_{2100 \ldots}$ décroît exponentiellement avec le temps.

Les probabilités

$$a_{1100 \cdots 1 \cdot 0 \cdots}$$

croissent au contraire, et cela d'autant plus que les fréquences existantes ν_s de la radiation sont voisines de la fréquence propre ν_2, de l'atome. Au bout du temps $\frac{r}{c}$ la radiation émise par l'atome A arrive en B ; la probabilité d'interaction des deux atomes, par exemple, représentée par

$$|a_{1200 \cdots 00}|^2$$

qui était nulle ou très faible auparavant, croît brusquement pour atteindre un maximum et décroître ensuite.

La grandeur du maximum de la probabilité est proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$. Donc l'intensité reçue par l'atome B est inversement proportionnelle au carré de la distance AB ; et il résulte de la théorie, que l'action s'est propagée de A à B avec la vitesse c de la lumière.

Nous allons traiter de même un cas d'interférences plus complexe. Soit A un atome émetteur et considérons un interféromètre quelconque constitué par deux trous d'Young, par exemple. Pour étudier la radiation émise à travers l'interféromètre, nous considérerons un second atome récepteur B, situé de l'autre côté des trous d'Young. Pour pouvoir appliquer notre méthode nous allons supposer A et B enfermés dans une enceinte à parois réfléchissantes, cette enceinte étant séparée en deux par l'écran percé des deux trous d'Young.

La radiation qui se trouve dans la région de A est produite d'une part par les ondes stationnaires créées par A, d'autre part par les ondes diffusées par B à travers les trous. Et de même pour la radiation de la région de B.

A l'instant initial A est excité. B ne l'est pas et aucune radiation ne se trouve dans l'enceinte, donc :

$$a_{21000\cdots0} = 1$$

On peut suivre les valeurs des diverses probabilités au cours du temps par l'intégration d'équations analogues à l'équation (50). Pour que B puisse être excité, c'est-à-dire pour que $a_{1200\cdots0}$ puisse prendre une valeur notable, on trouve que B doit être situé dans un certain nombre de régions, qui ne sont autres que les ventres trouvés dans la théorie classique.

De même nous pouvons traiter de la réflexion sur un miroir plan. L'atome émetteur A et l'atome récepteur B sont encore enfermés dans une enceinte dont on fera croître indéfiniment les dimensions. A l'instant initial, A seul est excité : $a_{2100\cdots0} = 1$.

On trouve encore que cette grandeur décroît exponentiellement avec le temps. Cherchons la probabilité pour que B soit excité, c'est-à-dire $|a_{1200\cdots0}|^2$.

Nous trouvons alors la variation de $a_{120\cdots,0,\cdots}$ avec le temps.

Jusqu'à l'instant t_0 qui correspond à l'arrivée sur B de l'onde émise par A on a $a_{120\cdots0} = 0$; $a_{120\cdots0}$ croît alors jusqu'à une valeur constante (inversement proportionnelle au carré de la distance des deux

atome). A l'instant t_1 où l'onde réfléchie sur le miroir revient en B il y a de nouveau un changement. Si l'atome B se trouve dans un ventre, la courbe suit le trajet (1), c'est-à-dire que l'intensité est notable. Si au contraire B se trouve à un nœud, la courbe suit le trajet (2) : l'intensité lumineuse est nulle. Pour une position intermédiaire de l'électron B on obtient une courbe intermédiaire entre (1) et (2).

Etude de l'effet Compton

La théorie quantique est basée sur la conservation de la quantité de mouvement. Initialement la quantité de mouvement de l'électron est nulle, celle de la radiation est un vecteur de grandeur $\frac{h\nu}{c}$. Après la diffraction la quantité de mouvement de l'atome est un vecteur $\overrightarrow{mv}$, celle de la radiation un vecteur $\frac{\overrightarrow{h\nu'}}{c}$. La somme de ces deux vecteurs doit être égale à la quantité de mouvement initiale $\frac{\overrightarrow{h\nu}}{c}$.

Dans la théorie que nous allons exposer, il nous faut remarquer que l'électron considéré est un électron libre : il n'a donc pas d'états quantiques définis par une suite discrète d'entiers ; nous pouvons toujours cependant caractériser sa vitesse par un nombre n qui sera ici continu (au lieu d'être un entier comme précédemment).

D'autre part dans l'expression de l'énergie de l'électron dans le champ, (équations (10) et (11)) nous avons fait une approximation dans le développement de

$$\frac{1}{2m}\left(p - \frac{eU}{c}\right)^2$$

mais ici le terme $\frac{eUp}{mc}$ ne produit aucun effet, car nous considérons un électron libre qui ne peut absorber un quantum entier ; il est donc nécessaire de conserver le terme $\frac{e^2U^2}{2mc^2}$, c'est-à-dire d'ajouter à l'Hamiltonien (12) le terme H_2 donné par l'équation (13).

Ceci posé nous allons encore être amenés à considérer les coefficients

$$a_{nn_1n_2 \dots n_s \dots}$$

dont les carrés représentent la probabilité pour que l'électron ait une vitesse définie par le nombre n, la radiation de fréquence ν_s étant définie par le nombre quantique n_s.

A l'instant initial, l'électron est immobile, seule la radiation ν_s est excitée, c'est-à-dire

$$a^{(0)}_{00\cdots n_s 00\cdots} = 1$$

tous les autres a étant nuls.

Cherchons la probabilité pour que, à l'instant t, l'électron ait une vitesse définie par n, le nombre quantique n_s de la radiation ν_s ait diminué de un, tandis qu'il s'est créé une nouvelle radiation de fréquence ν_σ. Cette probabilité est représentée par le carré du module de

$$a_{n,\ 00\cdots,\ n_s - 1,\ 0\cdots,\ 1_\sigma,\ 0\cdots}$$

On trouve que pour que la valeur de cette probabilité soit notable, il faut qu'il y ait la relation donnée par la théorie quantique entre les quantités de mouvement des radiations et de l'atome.

Le calcul précédent peut être développé pour trouver l'intensité de la lumière diffusée, on obtient l'expression classique de THOMSON, multipliée par un facteur voisin de l'unité (ce facteur est le cube du quotient $\frac{h\nu}{c}$ des fréquences avant et après la diffraction).

Etude de l'effet Doppler

L'explication quantique de l'effet DOPPLER est basée sur le principe de la conservation des quantités de mouvement de l'atome, et de la radiation émise par son électron.

La somme géométrique de la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$ du quantum de lumière et de la nouvelle quantité de mouvement mv de l'atome doit être égale à l'ancienne quantité de mouvement de l'atome. Comme la vitesse de l'atome varie, il y a variation de l'énergie lumineuse émise et par suite une variation de la fréquence qui correspond à la variation de fréquence donnée par la théorie ondulatoire de l'effet DOPPLER.

Nous pouvons développer une théorie de l'effet DOPPLER avec la théorie générale de la radiation que nous avons exposée. Considérons

un atome en mouvement et la radiation. L'état de l'électron émetteur est défini par un nombre quantique n ; le mouvement d'ensemble de l'atome est défini par un autre nombre quantique, soit m, qui définit la vitesse du noyau.

Supposons qu'à l'instant initial l'électron n'est pas sur son orbite stable, mais qu'il est sur $n = 2$ par exemple, et qu'il n'y a pas de radiations dans l'espace, donc :

$$a_{2m00\cdots0\cdots} = 1 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Cherchons après un certain temps la valeur du coefficient $a_{1m'0010\cdots0}$, qui nous représente la probabilité que l'atome ait émis son énergie d'excitation.

On trouve pour $a_{1m'0\cdots1\cdots0\cdots}$, une valeur différente de zéro, mais pour que cette valeur ne soit pas négligeable, il doit exister entre la quantité de mouvement initiale, définie par m, et la quantité de mouvement finale, définie par m', ainsi que celle $\frac{h\nu}{c}$ correspondant à l'indice s de la radiation émise, la même relation que celle obtenue par la théorie quantique ordinaire, c'est-à-dire que la somme des quantités de mouvement de la radiation et de l'atome après émission est égale à la quantité de mouvement primitive de l'atome. On peut même pousser le calcul jusqu'à obtenir l'intensité de la lumière émise : les résultats sont conformes à ceux de la théorie classique.

Nous voyons par ces quelques exemples que la théorie exposée ci-dessus nous permet de retrouver toute une série de résultats classiques ; mais son avantage est d'étudier d'une même façon des phénomènes qui dans la théorie classique sont étudiés de façons tout à fait différentes comme le problème des interférences ou l'effet COMPTON.

Pour terminer nous attirerons encore une fois l'attention sur les paramètres a dont le carré du module représente, nous l'avons dit, la probabilité pour que le système considéré soit dans un état déterminé. Si un des a seulement a une valeur différente de zéro, l'état du système en résulte bien défini par la théorie. Mais si deux des a ne sont pas nuls, on peut seulement dire quelle est la probabilité de trouver le système dans l'un des deux états ou bien dans l'autre. L'interprétation statistique de la mécanique quantique affirme qu'il n'est pas possible de prévoir sur le système rien de plus que ce résultat statistique. Cette conception se trouve en opposition absolue avec le principe de cau-

salité. D'autre part on peut sauvegarder ce principe en supposant que l'état du système est en réalité exactement prévisible, mais dépend de facteurs que nous ignorons encore ; on peut toujours penser que c'est notre ignorance à leur sujet qui laisse subsister une indétermination.

Imprimerie des Presses Universitaires de France,
Paris-Saint-Amand. — 31-5-1930.

PRIX DU FASCICULE : **35** *francs*

Abonnement un an : **120** *francs*